

УДК 621.396:681.34

**А.А. РОЕНКО, В.В. ЛУКИН, А.В. ТОЦКИЙ**

*Национальный аэрокосмический университет им. Н.Е. Жуковского «ХАИ», Украина*

## **ИСПОЛЬЗОВАНИЕ РОБАСТНЫХ ОЦЕНОК ПРИ ВОССТАНОВЛЕНИИ ФОРМЫ СИГНАЛОВ НА ОСНОВЕ БИСПЕКТРАЛЬНОЙ ОБРАБОТКИ**

Рассмотрены методы восстановления сигналов, основанные на биспектральном анализе. Показано, что при малом отношении сигнал/шум преобладающее влияние на оценку биспектра оказывают слагаемые с законом распределения, отличным от гауссова. Предложены методы формирования биспектральной оценки по ансамблю реализаций с использованием робастных процедур, в качестве которых исследованы медианная и мириадная оценки.

### **биспектральная оценка, робастная процедура, закон распределения**

#### **Введение**

Во многих прикладных задачах процесс обработки данных вызывает значительные трудности, связанные с тем, что исходная информация искажена помехами различного типа. При этом статистические характеристики шума часто априори не известны, а если и определены, то частично и неточно. Такая ситуация характерна при обнаружении и распознавании сигналов на фоне помех в радиолокации, гидроакустике и радиоастрономии, а также в системах дистанционного зондирования и в диагностических системах обработки данных [1-3]. Поэтому вопросы повышения эффективности и практической реализации разнообразных методов фильтрации и восстановления сигналов на фоне помех вызывают неизменный интерес у широкого круга специалистов в различных областях науки и техники.

Помимо априорной неопределенности характеристик помех, ещё одним важным параметром, оказывающим влияние на качество восстановления полезного сигнала, является отношение сигнал/шум. На практике при использовании традиционных методов фильтрации и восстановления сигналов требуемую точность оценивания удается реализовать обычно при больших ( $\gg 1$ ) значениях этого параметра. Однако в ряде важных практических задач в указанных выше приложениях отношение сигнал/шум на входе системы обработки не превышает

единицу.

Одним из перспективных подходов к решению таких задач является метод восстановления сигналов и изображений с использованием биспектрального анализа [4]. Несмотря на большую сложность вычисления тройных корреляционных функций (ТКФ) и биспектров по сравнению с обычными корреляционными функциями и энергетическими спектрами, моменты третьего порядка отличаются несколькими принципиальными преимуществами [5]:

- во-первых, ТКФ или биспектры позволяют сохранить комплексный Фурье-спектр сигнала и, следовательно, восстановить информацию о форме исходного сигнала;
- во-вторых, ТКФ (нечетный момент) гауссова шума стремится к нулю, что обеспечивает в ряде практических приложений устойчивость алгоритмов восстановления негауссовых сигналов к воздействию аддитивного гауссова шума;
- в-третьих, биспектр инвариантен к смещению исходного сигнала.

При так называемом прямом биспектральном методе [6] формирование биспектральной оценки (БО) предусматривает следующие этапы:

- 1) для каждой реализации находят выборочную БО с использованием прямого преобразования Фурье (ППФ);
- 2) оценку биспектра для всех реализаций получают

путем обычного усреднения БО всех наблюдаемых реализаций.

Затем с помощью рекурсивного алгоритма [2] восстанавливают амплитудный и фазовый Фурье-спектр сигнала. На заключительном этапе для формирования оценки восстановленного сигнала применяют обратное преобразование Фурье.

При больших отношениях сигнал/шум усреднение является оптимальной операцией формирования БО с точки зрения эффективности подавления шума, т.к. вещественная (*Re*) и мнимая (*Im*) компоненты БО для всех независимых реализаций, являющихся комплексными двумерными функциями, имеют плотности распределения вероятности (ПРВ), близкие к нормальному [6,7]. Однако, когда отношение сигнал/шум становится  $\leq 1$ , ситуация меняется. В этом случае закон распределения вероятности становится отличным от нормального [7] и, следовательно, усреднение уже не является оптимальной процедурой [8].

В связи с этим актуальной задачей представляется разработка и исследование других, отличных от традиционного усреднения, желательных, оптимальных, методов формирования БО. Однако в условиях отсутствия априорных сведений о сигнале и помехах это является нетривиальной задачей. Поэтому в данной работе для улучшения БО при обработке реализаций вместо операции нахождения среднего (*mean*) рассмотрена возможность применения робастных оценок [8]. В качестве таковых используются медиана (*med*) [9] и мириада (*myriad*) [10].

## 1. Постановка задачи

Рассмотрим вещественный стационарный одномерный процесс  $\{x^{(m)}(i)\}$ , наблюдаемый в виде дискретной последовательности  $i=0,1,2,\dots,I-1$  отсчетов во временной области по набору  $m=1,2,\dots,M$  независимых реализаций  $x^{(m)}(i)$ . Положим также, что данный процесс является смесью двух составляющих: сигнальной  $s(i-\tau^{(m)})$  и шумовой  $n^{(m)}(i)$ , где  $\tau^{(m)}$ -

случайный сдвиг исходного информационного детерминированного сигнала,  $n^{(m)}(i)$  -  $m$ -я реализация белого аддитивного стационарного гауссова шума с нулевым средним значением и неизвестной дисперсией  $\sigma_G^{(m)2}$ . Таким образом, уравнение наблюдения можно представить в следующем виде:

$$x^{(m)}(i) = s(i - \tau^{(m)}) + n^{(m)}(i). \quad (1)$$

Выборочную  $m$ -ю оценку биспектра  $\hat{B}_x^{(m)}(p, q)$  наблюдения (1) в соответствии с прямым методом запишем в виде

$$\begin{aligned} \hat{B}_x^{(m)}(p, q) &= \dot{X}^{(m)}(p) \dot{X}^{(m)}(q) \dot{X}^{(m)*}(p+q) = \\ &= \left| \hat{B}_x^{(m)}(p, q) \right| \exp(j\hat{\gamma}_x^{(m)}(p, q)) \end{aligned}, \quad (2)$$

где  $\dot{X}^{(m)}(\dots) = \text{ППФ}[x^{(m)}(i)] = \dot{S}^{(m)}(\dots) + \dot{N}^{(m)}(\dots)$  - прямое преобразование Фурье (ППФ)  $m$ -й реализации;  $\left| \hat{B}_x^{(m)}(p, q) \right|$  и  $\hat{\gamma}_x^{(m)}(p, q)$  - амплитудный и фазовый биспектры, соответственно;  $\dot{S}^{(m)}(\dots)$  и  $\dot{N}^{(m)}(\dots)$  - ППФ сигнала и шума, соответственно;  $p=0,1,\dots,I-1$ ,  $q=0,1,\dots,I-1$  - индексы независимых частот в биспектральной области.

Исходя из выражения для  $\dot{X}^{(m)}(\dots)$ , БО (2) для  $m$ -й реализации можно представить как [7]

$$\hat{B}_x^{(m)}(p, q) = \hat{B}_S^{(m)}(p, q) + \hat{B}_N^{(m)}(p, q), \quad (3)$$

где  $\hat{B}_S^{(m)}(p, q)$  - БО сигнала;  $\hat{B}_N^{(m)}(p, q)$  - шумовая компонента БО, наличие которой вызвано присутствием аддитивной помехи на входе системы.

Последнее слагаемое в выражении (3) можно записать следующим образом:

$$\begin{aligned} \hat{B}_N^{(m)}(p, q) &= \dot{S}(p) \dot{S}(q) \dot{N}^{(m)*}(p+q) e^{-j\tau^{(m)}p} + \\ &+ \dot{S}(p) \dot{S}^*(p+q) \dot{N}^{(m)}(q) e^{j\tau^{(m)}q} + \\ &+ \dot{S}(q) \dot{S}^*(p+q) \dot{N}^{(m)}(p) e^{j\tau^{(m)}p} + \\ &+ \dot{S}(p) \dot{N}^{(m)}(q) \dot{N}^{(m)*}(p+q) e^{-j\tau^{(m)}p} + \\ &+ \dot{S}(q) \dot{N}^{(m)}(p) \dot{N}^{(m)*}(p+q) e^{-j\tau^{(m)}q} + \\ &+ \dot{S}^*(p+q) \dot{N}^{(m)}(p) \dot{N}^{(m)}(q) e^{j\tau^{(m)}(p+q)} + \\ &+ \dot{N}^{(m)}(p) \dot{N}^{(m)}(q) \dot{N}^{(m)*}(p+q) \end{aligned}. \quad (4)$$

При больших отношениях сигнал/шум закон

распределения вероятности  $Re$  и  $Im$  компонент  $\hat{B}_N^{(m)}(p, q)$  зависит, в основном, от первых трёх слагаемых. Он близок к нормальному, поскольку член  $\dot{N}^{(m)}(\dots)$  для принятой модели помехи  $n^{(m)}(i)$  является реализацией белого гауссового шума с нулевым математическим ожиданием. Таким образом, в этом случае оптимальной операцией формирования БО для всех реализаций является усреднение:

$$\hat{B}_x^{(m)}(p, q) = \left\langle \hat{B}_x^{(m)}(p, q) \right\rangle_M, \quad (5)$$

где  $\langle \dots \rangle_M$  – операция усреднения по ансамблю  $M$  наблюдаемых реализаций.

Однако, совершенно иная ситуация имеет место, когда дисперсия шумов становится соизмеримой с мощностью сигнала. Рассмотрим этот случай более детально и исследуем плотности распределения вероятностей слагаемых, содержащих произведения двух и трех шумовых компонент.

## 2. Анализ статистических характеристик оценок биспектров и предлагаемые методы их обработки

Представим член  $\dot{N}^{(m)}(\dots)$  в следующем виде:

$$\dot{N}^{(m)}(\dots) = \text{ППФ} [n^{(m)}(i)] = N_{Re}^{(m)}(\dots) + jN_{Im}^{(m)}(\dots), \quad (6)$$

где  $N_{Re}$  и  $N_{Im}$  –  $Re$  и  $Im$  компоненты ППФ  $n^{(m)}(i)$ , каждая из которых является реализацией белого стационарного гауссового шума с нулевым математическим ожиданием (МО) и выборочными дисперсиями  $\sigma_{Re}^{(m)2} = \sigma_{Im}^{(m)2}$ , пропорциональными  $\sigma_G^{(m)2}$ .

Слагаемые с 4-го по 6-е в (4), например, член  $\dot{S}(p)\dot{N}^{(m)}(q)\dot{N}^{(m)*}(p+q)e^{-j\tau^{(m)}p}$  можно представить в виде  $Re$  и  $Im$  компонент как:

$$\begin{aligned} & \text{Re}[\dot{S}(p)\dot{N}^{(m)}(q)\dot{N}^{(m)*}(p+q)e^{-j\tau^{(m)}p}] = \\ & = N_{Re}^{(m)}(q)N_{Re}^{(m)}(p+q)\{S_{Re}(p)\cos\tau^{(m)}p + S_{Im}(p)\sin\tau^{(m)}p\} - \\ & - N_{Im}^{(m)}(q)N_{Im}^{(m)}(p+q)\{S_{Re}(p)\cos\tau^{(m)}p + S_{Im}(p)\sin\tau^{(m)}p\} + \\ & + N_{Im}^{(m)}(q)N_{Re}^{(m)}(p+q)\{S_{Re}(p)\sin\tau^{(m)}p - S_{Im}(p)\cos\tau^{(m)}p\} + \\ & + N_{Re}^{(m)}(q)N_{Im}^{(m)}(p+q)\{S_{Re}(p)\sin\tau^{(m)}p - S_{Im}(p)\cos\tau^{(m)}p\} \end{aligned} \quad (7a)$$

$$\begin{aligned} & \text{Im}[\dot{S}(p)\dot{N}^{(m)}(q)\dot{N}^{(m)*}(p+q)e^{-j\tau^{(m)}p}] = \\ & = N_{Re}^{(m)}(q)N_{Re}^{(m)}(p+q)\{S_{Im}(p)\cos\tau^{(m)}p - S_{Re}(p)\sin\tau^{(m)}p\} + \\ & + N_{Im}^{(m)}(q)N_{Im}^{(m)}(p+q)\{S_{Re}(p)\sin\tau^{(m)}p - S_{Im}(p)\cos\tau^{(m)}p\} + \\ & + N_{Re}^{(m)}(q)N_{Im}^{(m)}(p+q)\{S_{Re}(p)\cos\tau^{(m)}p + S_{Im}(p)\sin\tau^{(m)}p\} + \\ & + N_{Im}^{(m)}(q)N_{Re}^{(m)}(p+q)\{S_{Im}(p)\sin\tau^{(m)}p + S_{Re}(p)\cos\tau^{(m)}p\} \end{aligned} \quad (7b)$$

Анализ выражений (7a) и (7b) показывает, что каждая компонента содержит четыре слагаемых, представляющих собой произведение случайной величины вида  $N(\dots) \cdot N(\dots)$ , и сигнално-зависимых множителей, которые также являются случайными вследствие неопределенности  $\tau^{(m)}$ .

Найдем ПРВ произведения двух случайных гауссовых процессов  $x$  и  $y$ . Для этого запишем закон распределения каждого процесса следующим образом:

$$\begin{aligned} f_1(x) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi} \cdot \sigma_x} \cdot \exp\left(-\frac{(x - m_x)^2}{2\sigma_x^2}\right), \\ f_2(y) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi} \cdot \sigma_y} \cdot \exp\left(-\frac{(y - m_y)^2}{2\sigma_y^2}\right), \end{aligned} \quad (8)$$

где  $\sigma_x$  и  $\sigma_y$  – СКО;  $m_x$  и  $m_y$  – математические ожидания (в рассматриваемом нами случае полагаем  $m_x = m_y = 0$ ).

Для определения ПРВ процесса  $z = xy$  воспользуемся выражением, приведенным в [11]:

$$g(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f_1(x) \cdot f_2(y) \frac{dx}{|x|}. \quad (9)$$

Учитывая, что  $y = z/x$ , формулу (9) можно переписать в виде

$$g(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f_1(x) \cdot f_2(y) \frac{dx}{|x|} = A \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma_x^2} - \frac{z^2}{x^2 \cdot 2\sigma_y^2}\right) \frac{dx}{|x|}, \quad (10)$$

где  $A = \frac{1}{2\pi\sigma_x\sigma_y}$ .

Так как функция  $g(z)$  является четной относительно  $x$ , последнее выражение принимает вид:

$$g(z) = 2A \int_0^{\infty} \exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma_x^2} - \frac{z^2}{x^2 \cdot 2\sigma_y^2}\right) \frac{dx}{x}. \quad (11)$$

После замены переменных  $x^2 = t$ ,  $dx = \frac{1}{2\sqrt{t}} dt$  по-

лучим

$$g(z) = A \int_0^{\infty} \exp(-t\gamma - \frac{\beta}{t}) \frac{dt}{t}, \quad (12)$$

$$\text{где } \gamma = \frac{1}{2\sigma_x^2}, \quad \beta = \frac{z^2}{2\sigma_y^2}.$$

Решение этого интеграла можно записать в виде:

$$g(z) = A \int_0^{\infty} t^{\nu-1} \exp(-t\gamma - \frac{\beta}{t}) dt = 2A \left(\frac{\beta}{\gamma}\right)^{\nu/2} \cdot K_{\nu}(2\sqrt{\beta\gamma}), \quad (13)$$

при условии  $\beta > 0$  и  $\gamma > 0$  ([12], 3.471-9).

В данном случае  $\nu=0$  :

$$g(z) = 2A \cdot K_0\left(\frac{z}{\sigma_x \sigma_y}\right), \quad (14)$$

где  $K_0(z/\sigma_x \sigma_y)$  – цилиндрическая функция мнимого аргумента, которая принимает действительные значения только при действительном значении аргумента [13].

Раскладывая функцию  $K_0(\dots)$  в ряд [13]:

$$K_0(x) = \sqrt{\frac{\pi}{2x}} \cdot e^{-x} + \dots, \quad (15)$$

и отбросив слагаемые ... более высокого порядка малости, окончательно получим:

$$g(z) = B \cdot \sqrt{\frac{1}{z}} \cdot \exp\left(-\frac{z}{\sigma_x \sigma_y}\right), \quad (16)$$

$$\text{где } B = A \cdot \sqrt{2\pi\sigma_x \sigma_y} = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_x \sigma_y}}.$$

Выражение (16) показывает, что ПРВ произведения двух случайных величин с нормальным законом распределения отличается от Гауссова и имеет тяжелые хвосты. Так как каждая из формул (7а) и (7б) содержит сумму четырех членов с ПРВ вида (16), то закон распределения суммы данных членов вещественной и мнимой компонент 4-го, 5-го и 6-го членов в (4) хотя и отличается от (16), однако имеет более тяжелые хвосты по сравнению с нормальным распределением, что подтверждают стандартные тесты [11].

Последнее слагаемое в (4) также оказывает влияние на вид ПРВ БО. Рассмотрим его более подробно. С учетом (6) получаем

$$\begin{aligned} \text{Re}\{\dot{N}^{(m)}(p)\dot{N}^{(m)}(q)\dot{N}^{(m)*}(p+q)\} &= N_{\text{Re}}^{(m)}(p)N_{\text{Re}}^{(m)}(q)N_{\text{Re}}^{(m)}(p+q) + \\ &+ N_{\text{Re}}^{(m)}(p)N_{\text{Im}}^{(m)}(q)N_{\text{Im}}^{(m)}(p+q) + N_{\text{Im}}^{(m)}(p)N_{\text{Re}}^{(m)}(q)N_{\text{Im}}^{(m)}(p+q) - \\ &- N_{\text{Im}}^{(m)}(p)N_{\text{Im}}^{(m)}(q)N_{\text{Re}}^{(m)}(p+q) \end{aligned} \quad (17a)$$

$$\begin{aligned} \text{Im}\{\dot{N}^{(m)}(p)\dot{N}^{(m)}(q)\dot{N}^{(m)*}(p+q)\} &= N_{\text{Im}}^{(m)}(p)N_{\text{Im}}^{(m)}(q)N_{\text{Im}}^{(m)}(p+q) + \\ &+ N_{\text{Im}}^{(m)}(p)N_{\text{Re}}^{(m)}(q)N_{\text{Re}}^{(m)}(p+q) + N_{\text{Re}}^{(m)}(p)N_{\text{Im}}^{(m)}(q)N_{\text{Re}}^{(m)}(p+q) - \\ &- N_{\text{Re}}^{(m)}(p)N_{\text{Re}}^{(m)}(q)N_{\text{Im}}^{(m)}(p+q) \end{aligned} \quad (17б)$$

Анализ выражений (17а) и (17б) показывает, что вид ПРВ члена  $\dot{N}^{(m)}(\dots) \cdot \dot{N}^{(m)}(\dots) \cdot \dot{N}^{(m)*}(\dots)$  зависит от закона распределения произведения трёх стационарных гауссовых случайных величин с нулевым математическим ожиданием. Из-за сложности вывода аналитического выражения для ПРВ процесса, который является, произведением трех распределенных по нормальному закону процессов, характеристики процесса вида  $\dot{N}^{(m)}(\dots) \cdot \dot{N}^{(m)}(\dots) \cdot \dot{N}^{(m)*}(\dots)$  исследовались численным моделированием. Гистограмма распределения для вещественной и мнимой частей показана на Рисунке 1.

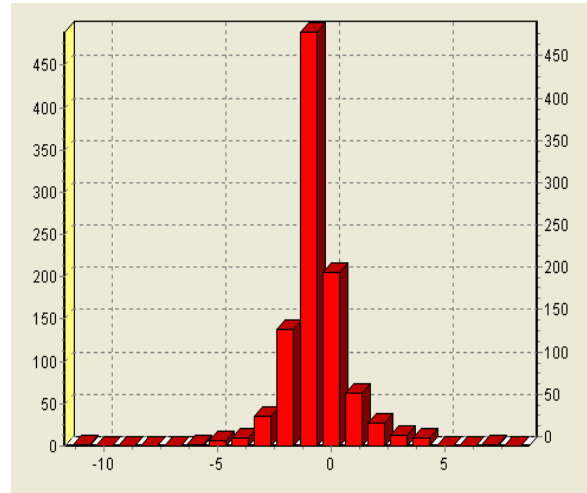


Рис. 1. Пример гистограммы шумовых компонент (17а) и (17б).

Коэффициент эксцесса в этом случае равен  $7...7,5$ , что подтверждает негауссов характер ПРВ.

Таким образом, проведенный анализ свидетельствует о том, что при малых отношениях сигнал/шум закон распределения вероятности БО становится отличным от нормального.

Для улучшения точности восстановления сигнала в присутствии аддитивного гауссового шума на входе биспектральной системы восстановления сигналов ниже исследована возможность применения робастных процедур, таких как медиана и мириада при формировании БО по наблюдаемому ансамблю реализаций.

БО, получаемая при использовании медианы, записывается следующим образом:

$$\hat{B}_{med}(p, q) = med_m[\operatorname{Re}(\hat{B}_x^{(m)}(p, q))] + j med_m[\operatorname{Im}(\hat{B}_x^{(m)}(p, q))]. \quad (18)$$

Свойства мириадной оценки зависят от настроенного параметра  $k$  [10]. Согласно [14], мириада эффективно подавляет помехи смешанного типа (гауссовы и импульсные шумы) в случае, когда  $k \approx 2\sigma_p$ , где  $\sigma_p$  – СКО основного распределения помехи. В ситуации, когда  $\sigma_p$  неизвестно, можно использовать робастную оценку [9], определяемую как

$$\sigma_p = 1,483 \cdot med_m \left| \hat{B}_x^{(m)}(p, q) - med_m(\hat{B}_x^{(m)}(p, q)) \right|. \quad (19)$$

При использовании мириадной операции, выражение для БО имеет вид:

$$\hat{B}_{myr}(p, q) = myr_m[k_1, \operatorname{Re}(\hat{B}_x^{(m)}(p, q))] + j myr_m[k_2, \operatorname{Im}(\hat{B}_x^{(m)}(p, q))], \quad (20)$$

где  $k_1 \approx 2\sigma_{pRe}$  и  $k_2 \approx 2\sigma_{pIm}$ , эти оценки СКО получены для выборок значений вещественной и мнимой частей БО раздельно в соответствии с (19).

### 3. Результаты моделирования

Для проведения статистических исследований предложенных методов была использована специализированная модифицированная программа “Bispectr”. Данное программное обеспечение позволяет исследовать одномерные сигналы различной формы, искаженные гауссовым и импульсным шумами, а также моделировать случайные сдвиги

исходного сигнала. На Рис.2 приведен исходный тестовый сигнал, наблюдаемый на сетке длительностью 256 отсчетов и состоящий из двух близкорасположенных импульсов прямоугольной формы с различными амплитудами  $A_1=2$ ,  $A_2=6$  и относительным сдвигом между импульсами  $\Delta t = 6$ .

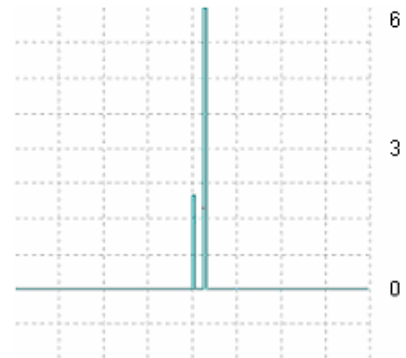


Рис. 2. Тестовый сигнал без шума.

Длительности импульсов  $t_1$  и  $t_2$  составляли 2 отсчета. Тестовый сигнал подвергался случайным смещениям, меняющимся от реализации к реализации с девиацией, равной  $\pm 12$  отсчетов.

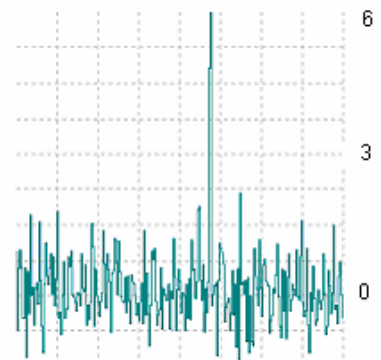


Рис. 3. Реализация тестового сигнала, искаженная аддитивным гауссовым шумом и случайным смещением.

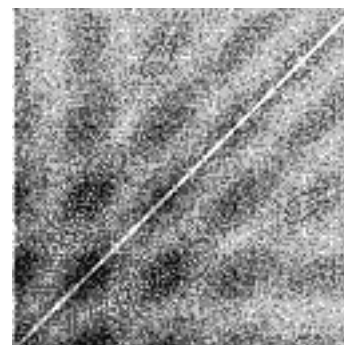


Рис. 4. Коэффициент эксцесса Re БО.

Реализация тестового сигнала, искаженного ад-

диффузным гауссовым шумом и случайным смещением показана на Рис. 3.

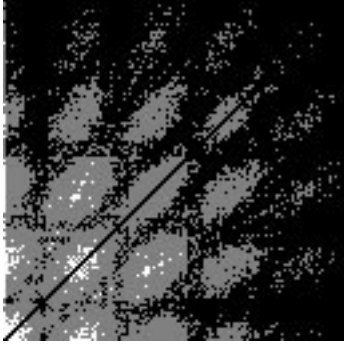


Рис.5. Дисперсия Re БО

С учетом свойств симметрии биспектра [6] при восстановлении амплитудного и фазового Фурье-спектров сигнала достаточно использовать всего лишь 1/8 часть биспектра, ограниченную главной треугольной областью. На Рис.4 и Рис.5 в виде изображений визуализированы соответственно значения коэффициента эксцесса и дисперсии, рассчитанные для вещественной части оценок  $\{\hat{B}_x^{(m)}(p, q), m=1, \dots, M\}$ . Массивы значений приведены не полностью, показана лишь их 1/4 часть, для которой хорошо видна их симметричность относительно диагонали. Для данного случая отношение сигнал/шум на входе равно 6,27, количество реализаций  $M=32$ , эксперимент повторялся  $K=30$  раз. При визуализации значения, расположенные на главной диагонали, были обнулены.

Более ярким пикселям на Рис.4 и 5 соответствуют большие значения коэффициента эксцесса и дисперсии и наоборот. Значения дисперсии достаточно велики для тех частотных индексов  $p$  и  $q$ , для которых велики значения модуля  $\hat{B}_S^{(m)}(p, q)$ , и, соответственно, основной вклад в  $\hat{B}_N^{(m)}(p, q)$  вносят первые три слагаемых в (4), которые характеризуются гауссовыми ПРВ вещественной и мнимой компонент. Именно для таких  $p$  и  $q$  значения коэффициента эксцесса стремятся к нулю (показаны темным цветом). Для тех же  $p$  и  $q$ , для которых дисперсия невелика (темный цвет на Рис.5) и вид ПРВ обусловлен слагаемыми с 4-го по 7-е в (4), имеет место явная

негауссовость, вследствие чего значения коэффициента эксцесса велики (более светлые пиксели на Рис.4).

Таким образом, для разных  $p$  и  $q$  ПРВ неодинаковы и зависят как от спектральных характеристик сигнальной составляющей, так и интенсивности помех. Причем априорная информация об этих характеристиках либо полностью отсутствует (напомним, что решается задача восстановления сигнала неизвестной формы), либо ограничена.

#### 4. Анализ результатов восстановления тестовых сигналов

Для количественной оценки и сравнительного анализа эффективности восстановления сигналов с использованием различных операций формирования БО ансамбля реализаций, проведены расчет и анализ следующих параметров:

- выходной дисперсии флуктуаций  $\bar{\sigma}_{out}^2$  (output variance):

$$\bar{\sigma}_{out}^2 = \frac{1}{K-1} \sum_{k=1}^K \left\{ \frac{1}{I} \sum_{i=0}^{I-1} [\hat{s}_k(i) - \bar{s}(i)]^2 \right\}, \quad (21)$$

где  $\hat{s}_k(i)$  –  $k$ -я оценка процесса;  $\bar{s}(i) = \left\{ \sum_{k=1}^K \hat{s}_k(i) \right\} / K$ ;

$K$  – количество экспериментов;

- динамической ошибки  $\delta_{out}^2$  восстановления формы сигнала (bias):

$$\delta_{out}^2 = \frac{1}{I} \sum_{i=0}^{I-1} [s(i) - \bar{s}(i)]^2. \quad (22)$$

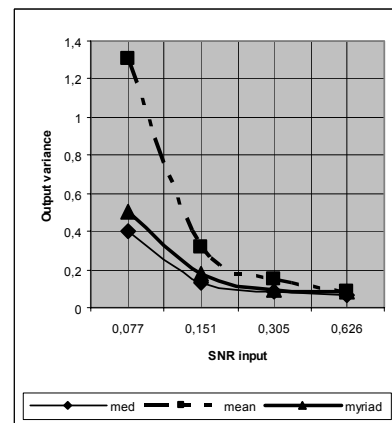
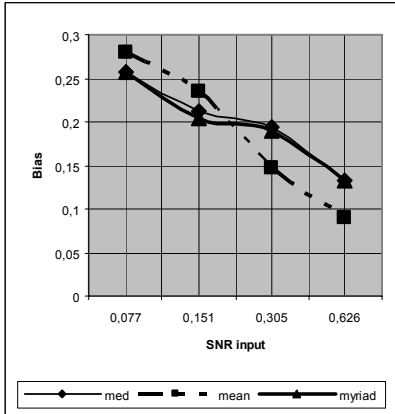
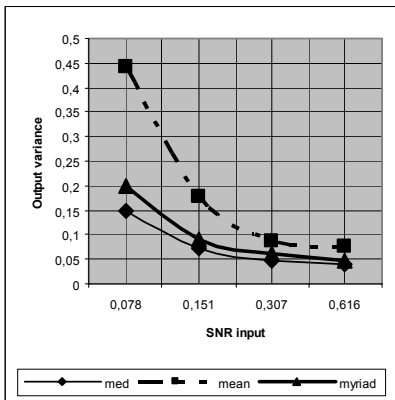
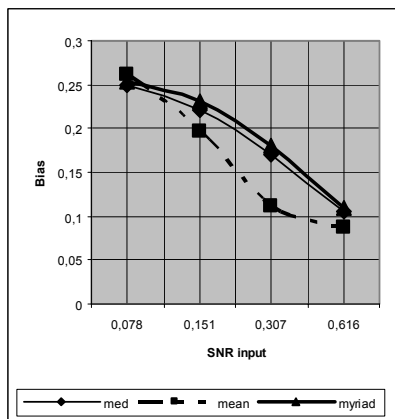
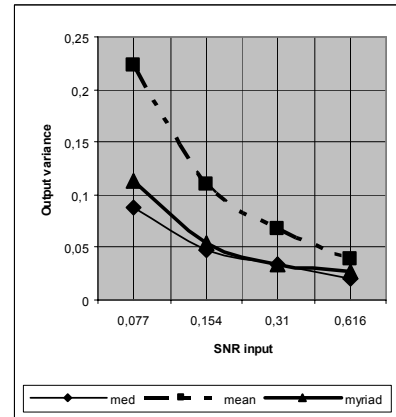


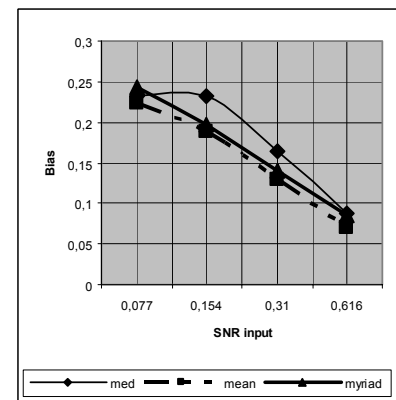
Рис.6. Зависимость  $\bar{\sigma}_{out}^2$  от  $\overline{SNR}_{inp}$  для  $M=32$ .

Зависимости  $\bar{\sigma}_{out}^2$  и  $\delta_{out}^2$  от отношения сигнал/шум на входе ( $\overline{SNR}_{inp}$ ) для различного количества реализаций  $M$  при обработке тестового сигнала, изображенного на Рис. 2, показаны на Рис.6-11. Для каждого значения  $\overline{SNR}_{inp}$  и количества реализаций  $M$  использовалось  $K=30$  экспериментов.

Рис.7. Зависимость  $\delta_{out}^2$  от  $\overline{SNR}_{inp}$  для  $M=32$ .Рис.8. Зависимость  $\bar{\sigma}_{out}^2$  от  $\overline{SNR}_{inp}$  для  $M=64$ .Рис.9. Зависимость  $\delta_{out}^2$  от  $\overline{SNR}_{inp}$  для  $M=64$ .Рис.10. Зависимость  $\bar{\sigma}_{out}^2$  от  $\overline{SNR}_{inp}$  для  $M=128$ .

Анализ полученных данных позволяет сделать следующие выводы:

- для всех рассматриваемых отношений сигнал/шум значения  $\bar{\sigma}_{out}^2$  лучше (меньше) в случае применения предложенных робастных процедур;
- благодаря применению медианы вместо усреднения удаётся улучшить  $\bar{\sigma}_{out}^2$  примерно в три раза;
- при малом отношении сигнал/шум значения  $\delta_{out}^2$  для рассматриваемых методов становятся приблизительно равными.

Рис.11. Зависимость  $\delta_{out}^2$  от  $\overline{SNR}_{inp}$  для  $M=128$ .

Поскольку решается задача восстановления сигнала неизвестной формы, сравнительный анализ характеристик стандартного и предложенных мето-

дов был проведен для нескольких других тестовых сигналов. Графики зависимостей  $\bar{\sigma}_{out}^2$  от  $\overline{SNR}_{inp}$  для случая тестового сигнала в виде двух импульсов треугольной формы ( $\Delta t=6$ ,  $A_1=2$ ,  $A_2=6$ ,  $t_1=t_2=3$ ) для разного количества реализаций  $M$  показаны на Рис. 12, 13. Кроме того, на Рис. 14 приведена зависимость  $\bar{\sigma}_{out}^2$  от  $\overline{SNR}_{inp}$  для тестового сигнала в виде импульсов прямоугольной формы с параметрами ( $\Delta t=6$ ,  $A_1=2$ ,  $A_2=6$ ,  $t_1=t_2=11$ ).

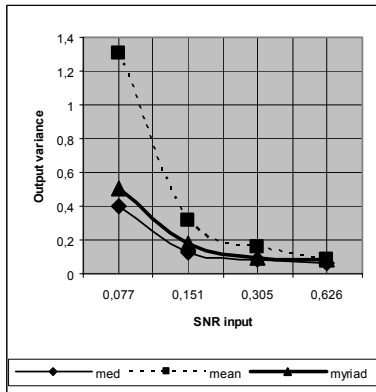


Рис.12. Зависимость  $\bar{\sigma}_{out}^2$  от  $\overline{SNR}_{inp}$  для  $M=32$ .

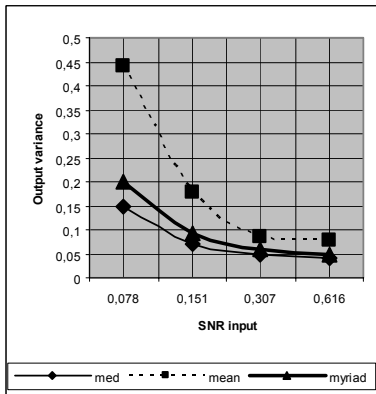


Рис.13. Зависимость  $\bar{\sigma}_{out}^2$  от  $\overline{SNR}_{inp}$  для  $M=64$ .

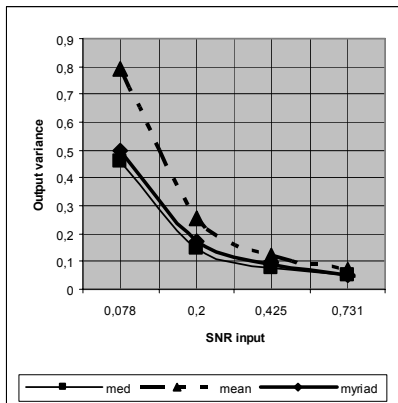


Рис.14. Зависимость  $\bar{\sigma}_{out}^2$  от  $\overline{SNR}_{inp}$  для  $M=64$ .

Как и для первого тестового сигнала, для этих тестовых сигналов при малых отношениях сигнал/шум зависимости  $\bar{\sigma}_{out}^2$  от  $\overline{SNR}_{inp}$  примерно совпадают для всех трех рассматриваемых методов, поэтому они не приведены.

Анализ полученных данных показывает, что формирование БО ансамбля реализаций при помощи робастных операций позволяет в несколько раз улучшить (уменьшить) выходную дисперсию флуктуаций. Таким образом, выигрыш наблюдается для различных форм тестовых импульсов, что очень важно, так как для практических приложений априорная информация о характеристиках сигнала либо отсутствует, либо является неполной.



Рис. 15. Оценка сигнала, восстановленная при использовании операции усреднения.

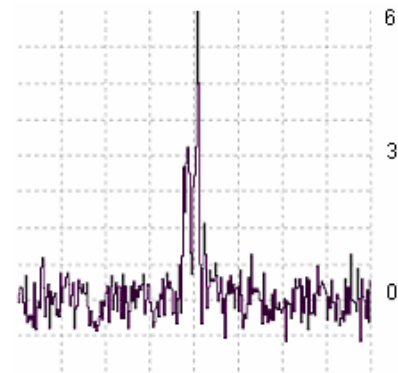


Рис. 16. Оценка сигнала, восстановленная при использовании медианной операции (18).

На Рис. 15 - 17 изображены оценки сигналов,



восстановленные при помощи использования операций усреднения, медианы и мириады при формировании БО ансамбля реализаций для тестового сигнала, показанного на Рис. 2. Изображения приведены для случая  $\overline{SNR}_{inp} = 0,151$  и  $M = 128$ .

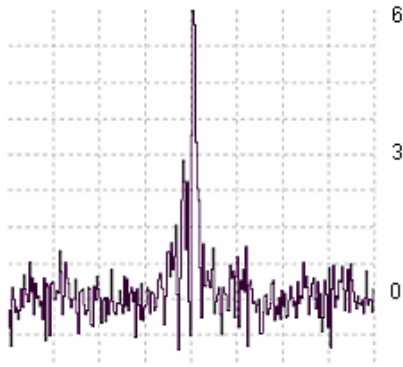


Рис. 17. Оценка сигнала, восстановленная при использовании мириадной операции (20).

Анализ приведенных графиков показывает, что при малом отношении сигнал/шум предложенные методы позволяют восстановить и различить исходные импульсы, в то время как в сигнале, восстановленном с использованием операции усреднения, этого сделать не удастся.

### Заключение

Проведенные исследования позволяют сделать вывод о том, что БО содержит слагаемые с законами распределения, отличными от нормального. При малых отношениях сигнал/шум эти компоненты оказывают значительное влияние на ПРВ компонент БО. Показано, что применение робастных процедур для формирования БО ансамбля реализаций позволяет значительно улучшить БО и обеспечить лучшее качество восстановления сигнала в сравнении с традиционными методами.

### Литература

1. Sasaki K., Sato T., Nakamura Y. Holographic Passive Sonar // IEEE Trans. Sonics Ultrasonics, SU-24. – 1977. – May. – P.193-200.
2. Lohmann A.W., Weigelt G., Wirnitzer B. Speckle

Masking in Astronomy: Triple Correlation Theory and Applications // Applied Optics. – 1983. – Vol. 22, Dec. – P. 4028-4037.

3. Totsky A.V., Gorbunenko B.F. Investigations of the Synthetic Aperture Radar Images Formed by Processing of Bispectral Data // International Journal of Electronics and Communications, (AEU). – 1999. – Vol. 53, №. 3. – P. 146-150.

4. Важинский В.Н., Тетерин В.В. Корреляционная функция третьего порядка и биспектр в задачах обработки сигналов // ОМП. – 1991. – №4. – С. 4-14.

5. Тоцкий А.В., Астола Я., Егиазарян К.О., Зеленский А.А., Курбатов И.В., Лукин В.В. Восстановление сигналов по оценкам биспектров в присутствии гауссовых и негауссовых помех // Зарубежная радиоэлектроника. – 2002. – №11. – С. 44-58.

6. Nikias, C.L., Raghuvеer, M.R. Bispectral Estimation: A Digital Signal Processing Framework // Proc. IEEE. – 1987. – Vol. 75, №7. – P. 869-891.

7. Totsky A.V., Lukin V.V., Kurbatov I.V., Egiazarian K.O. Combined bispectrum-filtering techniques for radar output signal reconstruction in ATR applications // Proceedings of International Conference "Automatic Target Recognition XIII". – Orlando (USA), 2003. – Vol. 5094. – P. 301-312.

8. Хьюбер Дж.П. Робастность в статистике: Пер.с англ. – М.: Мир, 1984. - 304 с.

9. Astola J., Kuosmanen P. Fundamentals of nonlinear digital filtering // CRC Press LLC. – Boca Raton (USA), 1997. – P. 276.

10. Kalluri S., Arce G. Adaptive Weighted Myriad Filter Algorithms for Robust Signal Processing in  $\alpha$ -stable Noise Environments // IEEE Trans. on Signal Processing. - 1998. - Vol.46. - No 2. - P. 322-334.

11. Левин Б.П. Теория случайных процессов и её применение в радиотехнике. – М.: Советское радио, 1957. – С. 97.

12. Градштейн И.С., Рыжик И.М. Таблицы интегралов сумм, рядов и произведений. – М.: Советское радио, 1962. – С. 354.

13. Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики. – М.: Государственное издательство технико-теоретической литературы, 1953. – С. 593, 673.

14. Абрамов С.К., Зеленский А.А., Лукин В.В. Определение моды выборки данных с существенно несимметричным законом распределения на основе

использования мириадной оценки и порядковых статистик // Радіотехнічні системи та засоби літальних апаратів. – 2002. – №29. – С. 74-83.

*Поступила в редакцію.04*

**Рецензент:**