

Восстановление сигналов по оценкам биспектров в присутствии Гауссовых и негауссовых помех

А. В. Тоцкий, Я. Астола, К. О. Егиазарян, А. А. Зеленский, И. В. Курбатов, В. В. Лукин

Статья посвящена исследованию методов восстановления сигналов, основанных на анализе корреляционных функций третьего порядка и биспектральном анализе. Предложен подход и алгоритмы восстановления фазового и амплитудного Фурье-спектров по оценкам биспектров с использованием сглаживания спектров сигнала с помощью линейной и нелинейной фильтрации. Приведены результаты численных расчетов восстановления сигналов, искаженных Гауссовым и негауссовым шумом, а также случайным сдвигом исходного сигнала. Показано, что комбинированные методы восстановления, объединяющие преимущества биспектрального анализа и сглаживания комплексного Фурье-спектра сигнала линейными или нелинейными фильтрами с различными размерами скользящих окон, улучшают устойчивость систем восстановления сигналов по отношению к Гауссовым и негауссовым шумам.

1. Введение

Во многих прикладных задачах оценивания параметров сигналов процесс обработки наблюдаемых сигналов сопровождается значительными трудностями при извлечении исходной информации, которая искажена помехами различного происхождения и уровня. При этом статистические характеристики шума часто априорно полностью не определены или определены частично и не точно. Данная ситуация типична для прикладных задач обнаружения и распознавания сигналов в радиолокации, гидролокации, оптической и радио астрономии, а также в системах дистанционного зондирования и в диагностических системах обработки медицинских сигналов. Поэтому, практическая реализация разнообразных методов фильтрации и восстановления сигналов в шумах сопряжена с постоянно растущим интересом для широкого круга специалистов в различных областях науки и техники.

Среди подходов, достаточно хорошо изученных в теоретическом плане, которые обеспечивают на практике эффективное подавление шумов при решении задач обнаружения и оценивания параметров сигналов, отметим, в первую очередь, методы винеровской и инверсной фильтрации [1 – 3], методы восстановления сигналов и изображений на основе процедуры регуляризации с целью решения обратной задачи [4 – 6], адаптивные алгоритмы восстановления изображений [7, 8], методы линейной и нелинейной фильтрации с помощью двумерных и одномерных скользящих окон [9 – 12], а также методы восстановления сигналов и изображений с использованием корреляционных функций третьего порядка и биспектрального анализа [13 – 23].

Эффективность первой группы методов фильтрации и восстановления сигналов и изображений [1 – 8] в значительной степени зависит от полноты априорных сведений о статистике сигналов и помех, которые на практике имеются далеко не всегда.

Подходы, использующие теорию линейной фильтрации, в ряде случаев позволяют реализовать оптимальные по критерию минимума среднеквадратической ошибки практические алгоритмы обработки сигналов при условии, например, нормального распределения аддитивного шума. Однако в условиях воздействия помех с законом распределения, отличающимся от нормального, к примеру, в условиях воздействия шума смешанного вида, который может, например, включать аддитивного Гауссову компоненту и импульсный шум, лучшие по отношению к линейной фильтрации результаты обеспечивают методы и алгоритмы нелинейной фильтрации [10 – 12]. Данная группа методов, несмотря на характерные для них

специфические динамические искажения, обеспечивает успешное решение задачи подавления смешанного (негауссова) шума в условиях полной или частичной априорной неопределенности в отношении свойств шумов за счет использования какого-либо фильтра из большого банка разнообразных сглаживающих фильтров, разработанных к настоящему времени. Однако эффективность этой группы методов подавления шумов падает при обработке "импульсных" сигналов, т.е. сигналов, представляющих собой набор импульсов, длительность которых сравнима с длительностью помеховых импульсных выбросов, а также в случаях, когда для нескольких наблюдаемых реализаций обрабатываемых сигналов имеют место случайные сдвиги информационной составляющей, которые могут быть, например, обусловлены влиянием турбулентности канала распространения сигналов.

Отметим также, что точность и границы применимости традиционных методов фильтрации и восстановления сигналов [1 – 12] сильно зависят от отношения сигнал/шум на входе измерительной системы. В большинстве перечисленных методов требуемую на практике точность оценивания параметров сигнала удается реализовать только для больших (значительно больше единицы) отношениях сигнал/шум. Так например, методы, использующие принцип регуляризации решения обратной задачи [4 – 6], позволяют решать задачи восстановления сигналов в сложной помеховой обстановке, но при этом с уменьшением отношения сигнал/шум одновременно ухудшается разрешение системы восстановления из-за подавления высокочастотных компонент обрабатываемого сигнала.

Для целого ряда важных прикладных задач обработки сигналов, например, для задач обнаружения слабых целей в радиолокации и в гидролокации, а также при получении изображений объектов малой интенсивности в астрономии, отношение сигнал/шум не превышает единицу или имеет значение, не намного превышающее единицу. К одному из перспективных подходов, который обеспечивает хорошие результаты при решении задач восстановления сигналов в таких условиях относится подход, основанный на использовании корреляционных функций третьего порядка и биспектров (биспектр – преобразование Фурье корреляционной функции третьего порядка) [13 – 23]. Несмотря на большую сложность вычисления тройных корреляционных функций и биспектров по сравнению с обычными корреляционными функциями и энергетическими спектрами, моменты третьего порядка отличаются несколькими принципиальными преимуществами.

Во-первых, тройная корреляционная функция позволяет сохранить комплексный Фурье-спектр сигнала, и следовательно, - восстановить информацию о фазовых характеристиках исходного сигнала.

Во-вторых, тройная корреляционная функция (нечетный момент) Гауссова шума стремится к нулю, что обеспечивает в ряде практических приложений робастность алгоритмов восстановления негауссовых сигналов на фоне Гауссовых шумов.

В-третьих, биспектр инвариантен к смещению исходного сигнала.

Более подробно эти свойства методов обработки сигналов, основанных на моментах третьего порядка и биспектрах, рассмотрены ниже.

Благодаря перечисленным выше преимуществам биспектрального анализа перед традиционной корреляционной обработкой, тройные корреляционные функции и биспектры успешно используют для обработки сигналов и изображений в гидролокации [13], астрономии [14, 15], оптике [17], в системах обработки биомедицинских сигналов [20, 23], в системах дистанционного зондирования [22] и др.

Несмотря на это, ряд важных вопросов, таких как улучшение оценок сигналов, восстановленных по оценкам биспектров, а также исследование устойчивости оценок биспектров к воздействию негауссовых шумов, например, упомянутых выше смешанных шумов, остаются до сих пор недостаточно изученными.

В данной статье для подавления как Гауссова, так и негауссова шума в комплексном Фурье-спектре сигнала, восстановленном по оценке биспектра, предлагается использовать сглаживание фазового и амплитудного спектра сигнала с помощью одномерных линейного или нелинейного фильтров.

Цель настоящего исследования – продемонстрировать преимущества предлагаемого комбинированного метода восстановления сигнала, искаженного Гауссовым и смешанным (негауссовым) шумом, по оценкам биспектра.

2. Анализ свойств тройной автокорреляционной функции и биспектра

Рассмотрим вещественный стационарный одномерный процесс $\{x^{(m)}(i)\}$, наблюдаемый в виде дискретной совокупности $i=0,1,2,\dots,I-1$ отсчетов во временной (или в пространственной) области по набору $m=1,2,\dots,M$ независимых реализаций $x^{(m)}(i)$.

Широко распространенной и общепринятой в теории и технике обработки сигналов служит одномерная статистика – автокорреляционная функция $R_x(k)$ (одномерная функция), которая для рассматриваемого процесса $\{x^{(m)}(i)\}$ в предположении бесконечно большого ($M \rightarrow \infty$) объема наблюдаемых реализаций, равна

$$R_x(k) = \left\langle \sum_{i=0}^{I-1} x^{(m)}(i)x^{(m)}(i+k) \right\rangle_{\infty}, \quad (1)$$

где $k = -I+1, \dots, I-1$ номер отсчета дискретного временного (пространственного) сдвига; $\langle \dots \rangle_{\infty}$ - операция усреднения по бесконечному ансамблю реализаций. Обычная автокорреляционная функция $R_x(k)$ отличается свойством симметрии вида

$$R_x(k) = R_x(-k). \quad (2)$$

В соответствии с теоремой Винера-Хинчина энергетический спектр $P_x(p)$ рассматриваемого процесса определим в виде следующего дискретного одномерного преобразования Фурье автокорреляционной функции вида (1)

$$P_x(p) = \sum_{k=-\infty}^{k=+\infty} R_x(k) \exp(-j2\pi kp), \quad (3)$$

или

$$P_x(p) = \left\langle \dot{X}^{(m)}(p) \dot{X}^{*(m)}(p) \right\rangle_{\infty}, \quad (4)$$

где $p = -I+1, \dots, I+1$ номер отсчета в частотной области; $\dot{X}^{(m)}(p) = \sum_{i=0}^{I-1} x^{(m)}(i) \exp(-j2\pi ip)$ - Фурье преобразование m -й реализации процесса $\{x^{(m)}(i)\}$ (m -я периодограмма); при этом положительно определенный энергетический спектр ($P_x(p) \geq 0$) для рассматриваемого вещественного процесса описывается симметричной функцией относительно нулевой частоты $P_x(p) = P_x(-p)$; символ * означает комплексно сопряженную величину; $j = \sqrt{-1}$.

Тройную автокорреляционную функцию (ТАКФ) $R_x(k,l)$ рассматриваемого процесса $\{x^{(m)}(i)\}$ при бесконечном количестве реализаций представим как

$$R_x(k,l) = \left\langle \sum_{i=0}^{I-1} x^{(m)}(i)x^{(m)}(i+k)x^{(m)}(i+l) \right\rangle_{\infty}, \quad (5)$$

где независимые смещения процесса k и l принимают значения, лежащие в пределах $k=-I+1, \dots, I-1, l=-I+1, \dots, I-1$.

При этом ТАКФ вида (5) обладает следующими свойствами симметрии [16]

$$R_x(k, l) = R_x(l, k) = R_x(l - k, -k) = R_x(k - l, -l) = R_x(-k, l - k). \quad (6)$$

По определению [16], биспектр – это преобразование Фурье ТАКФ. Биспектр является комплексной функцией двух переменных – двух независимых частот. Запишем выражение для биспектра в виде следующего двумерного дискретного преобразования Фурье ТАКФ вида (5) как

$$\dot{B}_x(p, q) = \sum_{k=-I+1}^{I-1} \sum_{l=-I+1}^{I-1} R_x(k, l) \exp[-j2\pi(kp + lq)], \quad (7)$$

где комплексный биспектр $\dot{B}_x(p, q) = |\dot{B}_x(p, q)| \exp[j\gamma_x(p, q)]$; $|\dot{B}_x(p, q)|$ и $\gamma_x(p, q)$ – соответственно амплитудный и фазовый биспектр рассматриваемого процесса; $p=-I+1, \dots, I-1, q=-I+1, \dots, I-1$ – номера отсчетов независимых частот.

Перечислим ниже основные свойства биспектров, которые сводятся к следующим:

1) если исследуемый процесс $\{x^{(m)}(i)\}$ – это стационарный Гауссов процесс с нулевым средним значением ($\langle x^{(m)}(i) \rangle_{M \rightarrow \infty} = 0$), то ТАКФ такого процесса и, следовательно, биспектр равны нулю:

$$R_x(m, n) = 0, \dot{B}_x(p, q) = 0. \quad (8)$$

2) биспектр – периодическая функция с периодом, равным 2π :

$$\dot{B}_x(p, q) = \dot{B}_x(p + 2\pi, q + 2\pi). \quad (9)$$

3) биспектр – это симметричная функция на биспектральной плоскости (плоскости двух независимых частотных переменных p и q):

$$\begin{aligned} \dot{B}(p, q) &= \dot{B}(q, p) = \dot{B}^*(-p, -q) = \dot{B}^*(-q, -p) = \\ &= \dot{B}(-p - q, q) = \dot{B}(p, -p - q) = \dot{B}(-p - q, p) = \dot{B}(q, -p - q) \end{aligned} \quad (10)$$

Анализ выражения (10) показывает, что для полного описания биспектра на биспектральной плоскости достаточно определить биспектр в ограниченной треугольной биспектральной области:

$$q \geq 0, p \geq q, p + q \leq I - 1. \quad (11)$$

4) в отличие от энергетического спектра, биспектр позволяет сохранить информацию о фазовом Фурье-спектре исследуемого процесса. Данное свойство биспектра вытекает из следующего уравнения связи комплексного биспектра вида (7) и комплексного Фурье-спектра (периодограммы) исследуемого процесса (см. выражение (4)). Это важное для задач восстановления сигналов по биспектральным данным уравнение имеет вид:

$$\dot{B}(p, q) = \dot{X}(p) \dot{X}(q) \dot{X}^*(-p - q). \quad (12)$$

5) из последнего уравнения (12) вытекает свойство инвариантности биспектра к временному (пространственному) сдвигу исходного процесса. Это свойство может быть проиллюстрировано с помощью следующего соотношения:

$$\begin{aligned} \dot{B}_{x_\tau}(p, q) &= \dot{X}_\tau(p) \dot{X}_\tau(q) \dot{X}_\tau^*(-p - q) = \\ &= \dot{X}(p) \dot{X}(q) \dot{X}^*(-p - q) \exp(-j2\pi p\tau) \exp(-j2\pi q\tau) \exp[-j2\pi\tau(-p - q)] = \dot{B}_x(p, q) \end{aligned} \quad (13)$$

где $\dot{X}_\tau(p) = \dot{X}(p) \exp(-j2\pi\tau)$ комплексный Фурье-спектр процесса, который смещен на вещественную величину τ во временной (пространственной области). Эта важная особенность биспектра будет использована в дальнейшем при решении задачи восстановления сигнала со случайным временным сдвигом.

3. Алгоритмы восстановления сигнала по оценкам биспектров

В этом разделе мы представим подход к решению задачи восстановления сигналов из оценок биспектров и рассмотрим алгоритмы восстановления сигналов по искаженным шумом биспектральным данным, зарегистрированным на ограниченной конечным ансамблем реализаций выборке.

Предположим, что на входе системы обработки регистрируют совокупность из конечного набора M искаженных шумом реализаций наблюдаемого сигнала. При этом m -я наблюдаемая реализация ($m=1, 2, \dots, M$) на входе измерительной системы (системы оценивания формы информационного сигнала) $x^{(m)}(i)$ представляет собой аддитивную смесь полезного детерминированного сигнала $s(i)$ и шума, содержащего компоненту Гауссова $n_G(i)$ и компоненту импульсного $n_{imp}(i)$ шума. Наряду с воздействием смеси Гауссова и импульсного шума полезный сигнал может быть также искажен случайными временными смещениями.

Исходный информационный сигнал $s(i)$ задан одномерной совокупностью вещественных временных (или в некоторых случаях – пространственных) отсчетов, количество которых $i=0, 1, 2, \dots, I-1$ ограничено интервалом наблюдения в измерительной системе. При этом ТАКФ исходного информационного сигнала полагается отличной от нуля.

В рамках рассматриваемой модели m -я реализация $x^{(m)}(i)$ описывается смесью полезного информационного сигнала, искаженного случайным сдвигом и выше отмеченной смесью Гауссового и импульсного шума может быть представлена как

$$x^{(m)}(i) = s(i - \tau^{(m)}) + n^{(m)}(i), \quad (14)$$

где $n^{(m)}(i) = n_G^{(m)}(i) + n_{imp}^{(m)}(i)$; $n_G^{(m)}(i)$ - m -я реализация белого аддитивного стационарного Гауссова шума с нулевым средним значением ($\langle n_G(i) \rangle = 0$) и дисперсией, равной $\sigma_G^{(m)2}$; $n_{imp}^{(m)}(i)$ - m -я реализация импульсного шума, значения которого для любого отсчета отличны от нуля с вероятностью $1-P_{imp}$; $\tau^{(m)}$ - случайный сдвиг исходного информационного сигнала $s(i)$. Компонента Гауссова шума $n_G^{(m)}(i)$ и компонента импульсного шума $n_{imp}^{(m)}(i)$ полагаются некоррелированными с истинным сигналом $s(i)$.

В соответствии с моделью процесса (14), наблюдаемого на входе измерительной системы, рассматриваются три основных источника искажений. Первый из них – это аддитивный белый Гауссов шум, происхождение которого обычно связано, главным образом, с собственными аппаратными шумами измерительной системы, а также с влиянием аддитивных шумов канала распространения сигналов. Второй источник искажений – это импульсный шум, который может возникать, например, вследствие влияния промышленных помех. Наконец, третий источник помех – это случайный сдвиг сигнала, величина которого может меняться от реализации к реализации, например, под воздействием задержек сигнала в случайно-неоднородном канале распространения, а также в результате случайных взаимных перемещений наблюдаемого объекта и антенны измерительной системы.

Основное внимание в данной работе уделено разработке и исследованию методов улучшения оценивания сигналов, восстанавливаемых по оценкам биспектра.

При восстановлении сигнала по биспектральным данным необходимо из набора наблюдаемых на входе измерительной системы реализаций (14) в первую очередь сформировать оценку ТАКФ. Для этого на вход коррелятора, содержащего три независимых канала, подаются процесс вида (14). Одна из реализаций $x^{(m)}(i)$ в первом канале коррелятора проходит без задержки, а во втором и третьем каналах формируются задержанные сигналы $x^{(m)}(i-k)$ и $x^{(m)}(i-l)$. С учетом практически всегда конечного объема обрабатываемых измерительной системой реализаций M оценку ТАКФ обрабатываемого сигнала, получаемую на выходе трехканального коррелятора, представим в виде:

$$\hat{R}_s(k, l) = \left\langle \sum_{i=0}^{I-1} x^{(m)}(i) x^{(m)}(i-k) x^{(m)}(i-l) \right\rangle_M, \quad (15)$$

где процедура $\langle \dots \rangle_M$ означает статистическое усреднение по конечному набору из M статистически независимых реализаций; $k = 0, 1, 2, \dots, I-1$ и $l = 0, 1, 2, \dots, I-1$ номера независимых отсчетов двумерной оценки ТАКФ.

С учетом выбранной модели помех, которые искажают полезный сигнал (см. выражение (14)), двумерную оценку ТАКФ вида (15) можно представить следующей суммой:

$$\hat{R}_s(k, l) = R_s(k, l) + \left\langle n^{(m)}(i) \right\rangle_M [R_s(k) + R_s(l) + R_s(k+l)] + \bar{s}(i) [\hat{R}_n(k) + \hat{R}_n(l) + \hat{R}_n(k+l)] + \hat{R}_n(k, l), \quad (16)$$

где $R_s(k, l)$ – ТАКФ полезного сигнала (момент третьего порядка); $\left\langle n^{(m)}(i) \right\rangle_M$ – среднее по ансамблю из M реализаций значение шума; $R_s(k)$, $R_s(l)$ и $R_s(k+l)$ – корреляционные функции сигнала (моменты второго порядка); $\bar{s}(i)$ – среднее значение полезного сигнала; $\hat{R}_n(k, l)$ – оценка ТАКФ шума (момент третьего порядка).

Анализ выражения (16) показывает, что оценка ТАКФ исследуемого процесса совпадает с ТАКФ полезного сигнала только при одновременном выполнении условий равенства нулю среднего значения полезного сигнала и шума, а также равенства нулю оценки ТАКФ шума

$$\left\langle n^{(m)}(i) \right\rangle_M = 0, \quad (17)$$

$$\bar{s}(i) = 0, \quad (18)$$

$$\hat{R}_n(k, l) = 0. \quad (19)$$

Следует отметить, что на практике одновременное выполнение выше приведенных условий (17 – 19) имеет место весьма редко. Поэтому, практически всегда оценка ТАКФ обрабатываемого сигнала оказывается искаженной шумом, который, как будет показано ниже, «просачивается» в сигнал, восстанавливаемый по оценке биспектра.

Оценка биспектра обрабатываемого сигнала $\hat{B}_s(p, q)$, которая по определению является Фурье преобразованием оценки ТАКФ обрабатываемого сигнала вида (15), может быть представлена с помощью следующего выражения:

$$\hat{B}_s(p, q) = DFT \left\{ \hat{R}_s(k, l) \right\} = \left| \hat{B}_s(p, q) \right| e^{j\hat{\gamma}_s(p, q)}, \quad (20)$$

где $p = 0, 1, 2, \dots, I-1$ и $q = 0, 1, 2, \dots, I-1$ - отсчеты независимых частот на двумерной биспектральной плоскости (p, q) ; $DFT \{...\}$ означает процедуру двумерного прямого преобразования Фурье; $\left| \hat{B}_s(p, q) \right|$ и $\hat{\gamma}_s(p, q)$ - соответственно оценки амплитудного и фазового биспектров.

При невыполнении условий (17 - 19) и биспектральная оценка, полученная с помощью преобразования Фурье зашумленной оценки ТАКФ вида (16), также оказывается искаженной шумом.

Известно несколько подходов улучшения биспектральных оценок, среди которых отметим, в первую очередь, методы, описанные в работах [18, 20] и [21]. Для уменьшения флуктуационной составляющей Гауссова шума в оценке биспектра в работах [18, 20] предлагают удалять при обработке данные, которые лежат на биспектральной плоскости на частотных осях $p=0$ $q=0$ и способствуют максимальному просачиванию шума в оценку биспектра. В статье [21] для восстановления сигналов предлагается использовать только те сечения биспектра, для которых отношения сигнал/шум превышают некоторое (очень большое) пороговое значение. При этом в отмеченных работах [18, 20] и [21] значительная часть биспектральных данных, а, следовательно, значительная часть полезной энергии сигнала безвозвратно теряется, что в ряде случаев просто недопустимо при низких отношениях сигнал/шум на входе системы обработки.

Для пояснения отмеченных недостатков методов, изложенных в [18, 20, 21], рассмотрим традиционную процедуру восстановления полезного сигнала из оценки биспектра, предложенную в работах [14, 15], и воспользуемся фундаментальными уравнениями связи между амплитудным биспектром и амплитудным Фурье-спектром сигнала, а также между фазовым биспектром и фазовым Фурье-спектром сигнала

$$\left| \dot{B}_s(p, q) \right| = \left| \dot{S}(p) \right| \left| \dot{S}(q) \right| \left| \dot{S}(p+q) \right|, \quad (21)$$

$$\gamma_s(p, q) = \varphi(p) + \varphi(q) - \varphi(p+q), \quad (22)$$

где $\left| \dot{S}(\dots) \right|$ и $\varphi(\dots)$ - соответственно амплитудный и фазовый Эрмитовы Фурье-спектры сигнала; причем для вещественного сигнала $\dot{S}(p) = \dot{S}^*(-p)$; $\varphi(p) = -\varphi(-p)$.

С учетом уравнений (21, 22) рассмотрим рекурсивный алгоритм восстановления фазового и амплитудного Фурье сигнала, подробно изложенный в работах [14, 15].

Данный рекурсивный алгоритм восстановления отсчетов фазового Фурье-спектра сигнала из дискретных отсчетов оценки фазового биспектра включает следующую последовательность процедур

$$\begin{aligned}
\hat{\phi}(p+q) &= \hat{\phi}(p) + \hat{\phi}(q) - \hat{\gamma}_s(p, q), \quad p = 0, \dots, I-1; \quad q = 0, \dots, I-1 \\
\hat{\phi}(0) &= 0, \\
\hat{\phi}(1) &= \hat{\phi}(1) + \hat{\phi}(0), \\
\hat{\phi}(2) &= 2\hat{\phi}(1) - \hat{\gamma}_s(1, 1), \\
\hat{\phi}(3) &= \hat{\phi}(2) + \hat{\phi}(1) - \hat{\gamma}_s(2, 1), \\
\hat{\phi}(4) &= 2\hat{\phi}(2) - \hat{\gamma}_s(2, 2), \\
\hat{\phi}(4) &= \hat{\phi}(3) + \hat{\phi}(1) - \hat{\gamma}_s(3, 1), \\
\hat{\phi}(5) &= \hat{\phi}(3) + \hat{\phi}(2) - \hat{\gamma}_s(3, 2), \\
\hat{\phi}(6) &= \hat{\phi}(3) + \hat{\phi}(3) - \hat{\gamma}_s(3, 3), \\
\hat{\phi}(5) &= \hat{\phi}(4) + \hat{\phi}(1) - \hat{\gamma}_s(4, 1), \\
&\dots\dots\dots, \\
\hat{\phi}(I-1) &= \hat{\phi}(I-1) + \hat{\phi}(0) - \hat{\gamma}_s(I-1, 0)
\end{aligned} \tag{23}$$

где $\hat{\phi}(\dots)$ – отсчеты оценки фазового Фурье-спектра сигнала, причем для вещественного сигнала $\hat{\phi}(0) = 0$; а $\hat{\phi}(1) = 0$. Оценка фазы для первого отсчета полагается равной нулю, так этот отсчет принципиально не может быть определен из соответствующего уравнения.

Рекурсивный алгоритм восстановления амплитудного Фурье-спектра сигнала из оценки амплитудного биспектра [14, 15] описывается с помощью следующей системы уравнений

$$|\hat{S}(p+q)| = \frac{|\hat{B}_s(p, q)|}{|\hat{S}(p)| |\hat{S}(q)|}, \quad p = 0, \dots, I-1; \quad q = 0, \dots, I-1;$$

$$|\hat{S}(0)| = \sqrt[3]{|\hat{B}_s(0, 0)|},$$

$$|\hat{S}(1)| = |\hat{B}_s(1, 0)| / (|\hat{S}(1)| |\hat{S}(0)|),$$

$$|\hat{S}(2)| = |\hat{B}_s(1, 1)| / (|\hat{S}(1)|^2),$$

$$|\hat{S}(3)| = |\hat{B}_s(2, 1)| / (|\hat{S}(2)| |\hat{S}(1)|),$$

$$|\hat{S}(4)| = |\hat{B}_s(2, 2)| / (|\hat{S}(2)|^2),$$

$$|\hat{S}(3)| = |\hat{B}_s(3, 0)| / (|\hat{S}(3)| |\hat{S}(0)|),$$

$$|\hat{S}(4)| = |\hat{B}_s(3, 1)| / (|\hat{S}(3)| |\hat{S}(1)|),$$

$$|\hat{S}(5)| = |\hat{B}_s(3, 2)| / (|\hat{S}(3)| |\hat{S}(2)|),$$

$$|\hat{S}(6)| = |\hat{B}_s(3, 3)| / (|\hat{S}(3)|^2),$$

(24)

.....,

$$|\hat{S}(I-1)| = |\hat{B}_s(I-1, 0)| / (|\hat{S}(I-1)| |\hat{S}(0)|)$$

где $|\hat{S}(\dots)|$ - отсчеты оценки амплитудного Фурье-спектра сигнала.

Перечислим ниже важные особенности, характерные для восстановления оценок фазового (23) и амплитудного (24) Фурье-спектров сигнала по данным оценок амплитудного и фазового биспектров:

- с учетом выше отмеченных свойств симметрии биспектров (10) оценки амплитудного и фазового биспектра полностью определены в пределах главной треугольной области значений $0 \leq q \leq p$ и $p+q \leq I-1$ для вещественных сигналов;

- каждый отсчет фазового Фурье-спектра сигнала (23) и каждый отсчет амплитудного Фурье-спектра сигнала (24) имеет $(p-1)/2$ различных независимых форм представления при нечетных значениях p и $p/2$ различных независимых форм представления при четных значениях p ;

- данные независимые представления отсчетов фазового и амплитудного Фурье-спектров позволяют восстанавливать несколькими различными путями значения соответствующих фаз и амплитуд с одинаковыми номерами отсчетов. Следовательно, существует важная возможность усреднения соответствующих отсчетов фазового и амплитудного Фурье-спектров, которая позволяет улучшить отношение сигнал/шум на выходе

системы восстановления сигналов. При этом усредненные величины участвуют в последующих (при возрастании номеров отсчетов) вычислительных процедурах;

- сглаживание шумов с помощью усреднения одноименных отсчетов фазового и амплитудного Фурье-спектров оказывается неодинаково эффективным в главной треугольной области значений частот на биспектральной плоскости. Для частот с низкими номерами отсчетов p и q эффект сглаживания шума меньше, чем для более высоких частот.

Для восстановления исходного сигнала по отсчетам фазового (23) и амплитудного (24) Фурье-спектров достаточно воспользоваться одномерной процедурой обратного одномерного преобразования Фурье вида:

$$\hat{s}_{rest}(i) = \left| IFT \left\{ \left| \hat{S}_{bisp}(r) \right| e^{j\hat{\varphi}_{bisp}(r)} \right\} \right|, r = 0, \dots, I-1, \quad (25)$$

где $IFT\{\dots\}$ означает процедуру обратного преобразования Фурье; $\left| \hat{S}_{bisp}(r) \right|$ и $\hat{\varphi}_{bisp}(r)$ - оценки амплитудного и фазового Фурье-спектра сигнала, которые восстановлены по биспектральным данным согласно рекурсивным алгоритмам (23) и (24).

Проведенные нами исследования биспектрального алгоритма восстановления сигнала [14, 15] позволяют отметить следующее:

1) несмотря на отмеченную выше возможность сглаживания шума с помощью усреднения соответствующих значений отсчетов фазового и амплитудного Фурье-спектра, точность системы восстановления сигнала остается невысокой из-за просачивания аддитивного Гауссова шума в оценку ТАКФ (см. выражение (16)) и, как следствие этого, - в оценку биспектра;

2) при воздействии смеси Гауссова и импульсного шума ошибки на выходе системы восстановления резко возрастают.

Поэтому, для улучшения точности алгоритма биспектрального восстановления сигнала в присутствии аддитивного Гауссова шума и смеси Гауссова и импульсного шума нами предлагается алгоритм биспектрального восстановления сигнала, основанный на сглаживании линейным или нелинейным фильтром зашумленных фазового и амплитудного Фурье-спектров сигнала, восстановленных из оценки биспектра. При этом среди широких классов линейных и нелинейных фильтров, применение которых может оказаться для рассматриваемого приложения целесообразным, нами ниже исследованы лишь соответственно, наиболее характерные представители этих классов, а именно усредняющий и медианный фильтры. Это сделано с целью иллюстрации положительного эффекта и определения перспективности проведения дальнейших исследований для предлагаемого комбинированного подхода к биспектрально-фильтрационному восстановлению сигналов и изображений.

Предлагаемые процедуры сглаживания амплитудного $\left| \hat{S}_{bisp}(r) \right|$ и фазового $\hat{\phi}_{bisp}(r)$ Фурье-спектров сигнала с помощью линейного (усредняющего) и нелинейного (медианного) фильтров описываются выражениями вида:

$$\left| \hat{S}_{bisp-mean}(r) \right| = \frac{1}{2N+1} \sum_{n=-N}^N \left| \hat{S}_{bisp}(r+n) \right|, \quad (26)$$

$$\hat{\phi}_{bisp-mean}(r) = \frac{1}{2N+1} \sum_{n=-N}^N \hat{\phi}_{bisp}(r+n), \quad (27)$$

$$\left| \hat{S}_{bisp-median}(r) \right| = MED \left\{ \left| \hat{S}_{bisp}(k) \right| \right\}, \quad k = r-N, \dots, r+N, \quad (28)$$

$$\hat{\phi}_{bisp-median}(r) = MED \left\{ \hat{\phi}_{bisp}(k) \right\}, \quad k = r-N, \dots, r+N, \quad (29)$$

где $(2N+1)$ – размер скользящего одномерного окна для усредняющего и медианного фильтров; процедура $MED\{\dots\}$ означает расчет медианы.

Подставляя сглаженные оценки амплитудного Фурье-спектра (26) или (28) и сглаженные оценки фазового Фурье-спектра (27) или (29) в выражение (25), получим сигнал на выходе системы восстановления для предлагаемого подхода. Основанием для ожидаемого улучшения качества восстановления служит тот факт, что для определенных видов информационных сигналов их спектры являются более гладкими функциями, чем сами сигналы, и тогда, соответственно, при фильтрации оценок спектров можно ожидать более эффективного подавления помеховой составляющей, в частности, за счет использования фильтров с размерами скользящего окна, большими, чем размеры скользящего окна фильтров, при которых их применение во временной (пространственной) области не приводит к существенному искажению формы $s(i)$.

Перейдем теперь к описанию условий, при которых проводился численный эксперимент и к обсуждению результатов численного эксперимента.

4. Анализ результатов численного эксперимента

Для проведения статистических исследований предложенного комбинированного биспектрального алгоритма с использованием сглаживания восстановленных по биспектральным данным фазового и амплитудного Фурье-спектров линейным/нелинейным фильтрами, для оценки точности восстановления сигнала, а также для сравнительного анализа эффективности традиционного и предлагаемого методов восстановления сигналов нами был разработан специализированный пакет программ.

Разработанное программное обеспечение позволяет исследовать одномерные сигналы различной формы, искаженные Гауссовым и импульсным шумами, а также искаженные в результате случайного сдвига исходного сигнала. Как уже отмечалось ранее, для сглаживания шумов в восстановленных по оценкам

биспектра фазовом и амплитудном Фурье-спектрах использовались усредняющий и медианный фильтры с различными размерами скользящего окна.

Для количественной оценки точности предложенных методов восстановления сигнала и сравнительного анализа эффективности восстановления сигналов различными (известными и предложенными) методами нами проводился расчет и анализ следующих параметров:

а) усредненных по ансамблю реализаций дисперсий флуктуаций $\bar{\sigma}_{inp}^2$ и отношений сигнал/шум \overline{SNR}_{inp} на входе системы обработки

$$\bar{\sigma}_{inp}^2 = \left\langle \frac{1}{I-1} \sum_{i=0}^{I-1} [x^{(m)}(i) - s(i)]^2 \right\rangle_{M_1}, \quad (30)$$

$$\overline{SNR}_{inp} = \frac{P_s}{\bar{\sigma}_{inp}^2}, \quad (31)$$

где M_1 – количество статистически независимых реализаций, участвующих в усреднении по ансамблю из этих

реализаций; $P_s = \frac{1}{I} \sum_{i=0}^{I-1} [s(i) - E]^2$ – мощность исходного полезного сигнала $s(i)$ и $E = \frac{1}{I} \sum_{i=0}^{I-1} s(i)$;

б) усредненных по ансамблю реализаций дисперсий флуктуаций $\bar{\sigma}_{out\ Bip/Comb}^2$ на выходе биспектральной системы восстановления сигналов и комбинированной биспектральной системы восстановления с усредняющим/медианным фильтром; данная величина рассчитывалась по минимуму функционала вида:

$$\bar{\sigma}_{out\ Bip/Comb}^2 = \left\langle \min \left\{ \frac{1}{I-1} \sum_{i=0}^{I-1} [\tilde{s}^{(m)}_{Bisp/Comb}(i) - s(i-t)]^2 \right\} \right\rangle_{M_1} \quad (32)$$

где $\tilde{s}^{(m)}_{Bisp/Comb}(i)$ – m -я реализация из M_1 реализаций на выходах рассматриваемых (традиционной и двух предложенных) систем восстановления сигналов; t – смещение, которое введено в расчет ошибки (32) с учетом отмеченной выше (см. формулу (13)) инвариантности биспектра к сдвигу восстанавливаемого сигнала;

в) усредненного по ансамблю реализаций отношения сигнал/шум \overline{SNR}_{out} , которое рассчитывалось на выходе традиционной системы для биспектрального восстановления сигнала и для комбинированного биспектрального восстановления сигнала с использованием усредняющего или медианного фильтра в виде

$$\overline{SNR}_{out} = \frac{P_s}{\bar{\sigma}_{out\ Bip/Comb}^2}, \quad (33)$$

г) среднеквадратичного критерия качества (точности) восстановления сигнала, позволяющего оценить улучшение отношения сигнал/шум на выходе системы восстановления по сравнению со входом

$$\varepsilon = \frac{\overline{SNR}_{out}}{\overline{SNR}_{inp}}. \quad (34)$$

Нами проведены статистические исследования трех методов восстановления сигнала:

Метод №1 – традиционный метод восстановления сигнала из оценки биспектра [14, 15], основанный на рекурсивном алгоритме восстановления фазового (23) и амплитудного (24) Фурье-спектров сигнала по оценкам биспектра;

Метод №2 – предложенный комбинированный метод восстановления сигнала с использованием сглаживающего медианного фильтра на основе выражений (23), (24), (28), (29);

Метод №3 - предложенный комбинированный метод восстановления сигнала с использованием сглаживающего усредняющего фильтра на основе выражений (23), (24), (26), (27).

Разработанное программное обеспечение позволяет в процессе моделирования восстановления сигналов реализовать следующие возможности:

1) Моделировать различные входные тестовые сигналы $s(i)$, например, сигналы в виде двух импульсов различной формы, с различными амплитудами, длительностями и относительными смещениями. В данной работе представлены результаты исследования двух прямоугольных импульсов одинаковой длительности с различными амплитудами. Тестовый исходный сигнал $s(i)$ генерировался в виде последовательности положительных вещественных значений, заданных на сетке отсчетов $i=0, 1, 2, \dots, 255$.

2) Моделировать различные виды помех: белый аддитивный Гауссов шум $n_G^{(m)}(i)$ с заданной дисперсией, а также смесь белого и импульсного шума $n_{imp}^{(m)}(i)$. При этом компонента импульсного шума генерировалась с заданными амплитудами и вероятностями положительных и отрицательных импульсных выбросов (использовалась модель импульсного шума типа «соль и перец» [9]).

3) Рассчитывать оценки ТАКФ и биспектра сигнала, с помощью которых затем восстанавливать комплексный Фурье-спектр сигнала, и, в конечном итоге, восстанавливать сигнал.

4) Реализовать традиционную для биспектральной обработки процедуру подавления шума с помощью усреднения соответствующих одноименных отсчетов фазового и амплитудного спектров сигнала, а также предлагаемую процедуру сглаживания шума в восстановленных Фурье-спектрах сигнала линейным или нелинейным фильтром.

5) Рассчитывать совокупность параметров (30 – 34), определяющих точностные характеристики исследуемых методов оценивания восстановленных сигналов.

Численное моделирование восстановления сигналов проводилось для двух случаев:

Случай А: присутствие только аддитивного Гауссова шума;

Случай Б: воздействие смеси аддитивного Гауссова и импульсного шумов.

В первом случае (единичная выборка) значения дисперсии шума на входе и выходе системы восстановления, а также отношения сигнал/шум и оценки ТАКФ рассчитывались для каждой m -й реализации. После этого проводился расчет усредненных величин \overline{SNR}_{in} и \overline{SNR}_{out} , а также величины ε по результатам, полученным для $M_I = 10$ независимых реализаций. Расчеты при этом проводились в соответствии с формулами (31), (33) и (34).

Во втором случае (выборка из 200 реализаций) статистические исследования и сравнительный анализ проводились для известного Метода №1 и для предлагаемых комбинированных Методов №№ 2 и 3. В отличие от первого случая оценки ТАКФ рассчитывалась на основе формулы (15) для большого ансамбля из $M = 200$

независимых реализаций. Величины \overline{SNR}_{inp} , \overline{SNR}_{out} и ε рассчитывались с использованием формул (31), (33) и (34), причем в последних формулах величина $M_I = 200$.

На рис. 1 приведен исходный тестовый сигнал в виде совокупности двух близко расположенных импульсов прямоугольной формы с различными амплитудами и относительным сдвигом между импульсами, равным $\Delta t_{12} = 9$ отсчетам. Амплитуды сигнальных импульсов выбирались равными $A_1 = 2$ и $A_2 = 6$ одинаковой длительности, причем длительности импульсов выбирались короткими и равными $\Delta t_1 = \Delta t_2 = 2$ отсчетам. Мощность данного исходного тестового сигнала равна $P_s = 0,9549$.

Для ряда практических приложений импульс с амплитудой A_1 можно трактовать как "информационный", в то время, как наличие второго импульса может быть обусловлено, например, активной помехой, при этом именно выявление импульса с амплитудой A_1 на фоне помех является основной задачей. Рассматриваемая модель тестового сигнала и цель вторичной обработки принятых сигналов типичны для задач обнаружения малоразмерных объектов на фоне мощной активной помехи, например, в радиолокации, или для задач идентификации звезды слабой интенсивности, наблюдаемой на фоне близко расположенной мощной звезды в астрономии.

Очевидно, что для рассматриваемой модели применение усредняющего фильтра непосредственно во временной (пространственной) области с целью подавления помех неизбежно приведет к большим динамическим ошибкам, проявляющимся в "размытии" сигнальных импульсов, причем степень "размытия" возрастает при увеличении размера скользящего окна. Медианный фильтр при его применении во временной (пространственной) области для рассматриваемой модели информационной составляющей способен "сохранить" сигнальные импульсы, только если размер его апертуры не больше трех отсчетов, но при этом и эффективность подавления помех очень низка. С другой стороны, медианный фильтр с размером скользящего окна, большим, чем три отсчета, вообще неприменим, так как он устранил сигнальные импульсы, "воспринимая" их, как импульсную помеху.

На рис. 2 – 4 показаны соответственно ТАКФ, а также амплитудный и фазовый биспектры исходного тестового сигнала, показанного на рис. 1. Хорошо видно, что амплитудный и фазовый биспектры являются достаточно гладкими функциями, хотя фазовый биспектр и имеет резкие скачки (разрывы) значений в области высоких частот, наличие которых обусловлено спецификой расчета фазы при условии, что ее значения должны находиться в пределах интервала $[-\pi; \pi]$.

Дисперсия Гауссова шума, искажающего входной сигнал, задавалась равной трем фиксированным значениям $\overline{\sigma}_{inp}^2 = 0,3; 0,5$ и $1,0$, т. е. моделировались входные соотношения сигнал-помеха, близкие к единице.

Для импульсного шума типа «соль и перец» были выбраны следующие исходные параметры: амплитуды положительных и отрицательных импульсных выбросов: соответственно $A_{pos} = 2$ (амплитуды положительных импульсных выбросов выбирались равными амплитуде информационного импульса) и $A_{neg} = 0$; вероятности появления отрицательных P_{neg} и положительных P_{pos} импульсных выбросов принимали три значения $P_{neg} = P_{pos} = 5\%, 10\%$ и 30% (при этом $P_{neg} = P_{pos}$ и суммарная вероятность $P_{imp} = P_{neg} + P_{pos}$, см. Таблицу 2). Для случая смешанного шума дисперсия компоненты Гауссового шума фиксировалась и была равной $\overline{\sigma}_{inp}^2 = 0,3$.

Во всех наших расчетах тестовый сигнал, исходное положение которого показано на Рис. 1, подвергался случайным смещениям, которые менялись от реализации к реализации с девиацией, равной 24 отсчетам, в соответствии с равномерным законом распределения.

В Таблицах 1 и 2 приведены результаты численных расчетов для первого случая, т.е. при обработке единичных реализаций наблюдаемых процессов. Исследовалась устойчивость методов восстановления к Гауссовым и негауссовым шумам с получением последующих усредненных оценок точности по 10 независимым реализациям. Для предлагаемых комбинированных Методов №№ 2 и 3 размер скользящего окна выбирался равным $(2N+1) = 3; 5; 7$ и 9 отсчетам.

Таблица 1. Результаты, полученные для аддитивного Гауссова шума с нулевым средним значением

Метод№	\overline{SNR}_{inp}	\overline{SNR}_{out}	ε	\overline{SNR}_{inp}	\overline{SNR}_{out}	ε	\overline{SNR}_{inp}	\overline{SNR}_{out}	ε
<i>Размер скользящего окна $2N+1=3$</i>									
1	3,166	5,898	1,863	1,907	3,989	2,092	0,947	1,948	2,056
2		7,887	2,491		5,343	2,802		2,644	2,792
3		8,368	2,643		5,767	3,024		2,829	2,987
<i>Размер скользящего окна $2N+1=5$</i>									
1	3,238	5,343	1,650	1,979	3,699	1,869	0,939	1,838	1,957
2		7,324	2,262		5,917	2,990		3,816	3,393
3		8,085	2,497		7,239	3,658		3,617	3,852
<i>Размер скользящего окна $2N+1=7$</i>									
1	3,142	5,458	1,737	1,945	3,390	1,743	0,993	2,038	2,052
2		9,605	3,057		5,934	3,051		4,027	4,055
3		11,063	3,521		6,518	3,351		4,611	4,644
<i>Размер скользящего окна $2N+1=9$</i>									
1	3,245	6,146	1,894	1,908	4,449	2,332	0,953	2,038	2,139
2		10,731	3,307		9,626	5,045		4,380	4,596
3		12,72	3,920		11,675	6,119		4,927	5,170

Анализ данных Таблицы 1 позволяет отметить следующее:

- значения отношений сигнал/шум на выходе системы восстановления сигнала \overline{SNR}_{out} и значения показателей качества восстановления ε , рассчитанные с использованием предлагаемых комбинированных методов №№2 и 3, превышают соответствующие величины, полученные традиционным методом №1, как при больших ($\overline{SNR}_{inp} \approx 3$), так и при малых ($\overline{SNR}_{inp} \approx 1$) значениях отношений сигнал-помеха на входе;
- для рассмотренных пределов изменения входного отношения сигнал/шум (в 3 раза) эффективность методов №№ 2 и 3 (см. значения ε) по отношению к воздействию Гауссова шума сохраняется; значения ε для методов №№ 2 и 3 больше, чем для метода №1 в 1,5 раз (для размера скользящего окна $2N+1=3$) и в 2 раза (для размера скользящего окна $2N+1=9$);
- для рассматриваемого тестового сигнала с увеличением размера скользящего окна от $2N+1=3$ до $2N+1=9$ наблюдается более эффективное сглаживание аддитивного Гауссова шума;
- все три исследуемых метода отличаются инвариантностью к случайному сдвигу тестового сигнала.

Таблица 2. Результаты, полученные для смеси аддитивного Гауссова шума с нулевым средним значением и фиксированной величиной дисперсии $\overline{\sigma}_{inp}^2 = 0,3 = \text{const}$ и импульсного шума ($P_{pos} = P_{neg} = 5\%; 10\%; 30\%$).

Метод №	\overline{SNR}_{inp}	\overline{SNR}_{out}	ε	\overline{SNR}_{inp}	\overline{SNR}_{out}	ε	\overline{SNR}_{inp}	\overline{SNR}_{out}	ε
<i>Размер скользящего окна $2N+1=3$</i>									
1	2,030	3,110	1,532	1,553	2,729	1,757	0,991	1,794	1,810
2		4,413	2,174		4,319	2,781		2,910	2,936
3		4,498	2,211		4,338	2,793		2,478	2,501
<i>Размер скользящего окна $2N+1=5$</i>									
1	2,008	3,032	1,510	1,767	2,070	1,774	0,910	1,675	1,841
2		5,012	2,496		5,660	3,203		3,274	3,598
3		5,012	2,496		6,121	3,464		3,226	3,545
<i>Размер скользящего окна $2N+1=7$</i>									
1	1,950	3,050	1,564	1,709	3,114	1,822	1,077	2,070	1,922
2		5,146	2,639		5,952	3,483		4,056	4,184
3		5,581	2,862		6,953	3,858		4,962	4,607
<i>Размер скользящего окна $2N+1=9$</i>									
1		3,314	1,771		3,232	1,848		1,939	1,805

2	1,871	6,971	3,726	1,749	6,576	3,760	1,074	4,039	3,761
3		7,475	3,995		7,132	4,078		4,219	3,928

Результаты, приведенные в Таблице 2, позволяют отметить следующие закономерности:

- в целом, все три исследуемые метода отличаются худшим (по критерию \mathcal{E}) подавлением смешанного шума по сравнению с подавлением Гауссова шума (см. Таблицу 1); тем не менее, как показал проведенный анализ, методы биспектральной обработки являются применимыми и для восстановления сигналов, искаженных помехами смешанного вида, что, по имеющейся у нас информации, ранее не исследовалось и не отмечалось в литературе;
- предлагаемые методы №№2 и 3 отличаются устойчивым качеством восстановления сигналов при изменении вероятности импульсных выбросов $P_{imp} = P_{pos} + P_{neg}$ в широких пределах от 10% до 60%;
- для рассматриваемого тестового сигнала в условиях воздействия смешанного шума с увеличением размера скользящего окна показатели эффективности предлагаемых методов улучшаются;

Таким образом, предлагаемые методы №№2 и 3 могут быть рекомендованы не только для традиционно используемого в практике биспектральной обработки подавления Гауссова шума, но представляются также перспективным инструментом подавления смешанного негауссова шума. Вместе с тем, актуальным остается вопрос выбора типа и параметров фильтра, применение которого позволило бы достигать высокой эффективности комбинированной обработки в условиях варьирования в широких пределах характеристик информационной составляющей сигнала и свойств помех.

Перейдем к сравнительному анализу результатов, полученных для второго случая, т. е. при усреднении данных по достаточно большой выборке ($M=200$ независимых реализаций) наблюдаемого процесса, искаженного Гауссовым шумом или смешанным – негауссовым шумом. Для каждой реализации также моделировался случайный сдвиг сигнальной составляющей. Отметим, что наличие таких случайных смещений существенно затрудняет "когерентное" накопление сигналов при наблюдении нескольких реализаций для многих методов обработки процессов. В то же время, при использовании биспектральных методов в силу отмеченного ранее свойства инвариантности биспектра к сдвигу (13) "квазикогерентное" накопление осуществляется практически автоматически.

Сравнение качества восстановления сигналов различными методами будем проводить с помощью визуального сравнения графиков восстановленных сигналов, как это делает, например, оператор при практическом решении задач обнаружения и распознавания радиолокационных целей или астрономических объектов. Вначале рассмотрим воздействие на систему восстановления сигналов аддитивного Гауссова шума. На Рис. 5 показана реализация сигнала, искаженного аддитивным Гауссовым шумом (с дисперсией

$$\sigma_{inp}^{(m)2} = \frac{1}{I-1} \sum_{i=0}^{I-1} [x^{(m)}(i) - s(i)]^2 = 0,4969. \text{ Случайное смещение исходного сигнала относительно среднего}$$

положения, показанного на рис. 1, равно в данном случае 24 отсчетам. На рис. 6 представлен график оценки ТАКФ, полученной в результате усреднения по ансамблю из $M=200$ реализаций. Анализ этого графика показывает, что данная оценка ТАКФ сильно искажена шумом (сравните с рис. 2), который затем просачивается в оценку биспектра, соответственно искажая и восстановленные по оценке биспектра оценки фазового и амплитудного Фурье-спектров сигнала, что, в конечном итоге, приводит и к заметным остаточным искажениям сигнала, восстановленного с помощью известного метода №1 (см. рис. 7).

Графики сигналов, восстановленных предлагаемыми методами №№ 2 и 3, в присутствии аддитивного Гауссова шума, полученные для размера скользящего окна размером $2N+1=9$ отсчетов, представлены соответственно на рис. 8 и 9. Сравнительный визуальный анализ результата, полученного известным методом №1 (рис. 7) и результатов, полученных с помощью предлагаемых методов №2 (рис. 8) и №3 (рис. 9), позволяет отметить лучшее подавление Гауссова шума для сигналов, восстановленных предлагаемыми методами по сравнению с традиционным методом. Особенно заметны различия в степени подавления помех вне области расположения сигнальных импульсов с амплитудами $A1$ и $A2$. При этом следует отметить, что с точки зрения величины ϵ метод №2 и метод №1 дают приблизительно одинаковые результаты. В связи с этим, возможно, при решении конкретных задач (обнаружения сигнальных импульсов, определения их амплитуд и т. п.) кроме количественных критериев эффективности обработки, использованных нами при проведении исследований в рамках данной статьи, целесообразно использовать и другие критерии.

На рис. 10 – 12 приведены графики сигналов, восстановленные методом №1, а также методами №№ 2 и 3 в случае воздействия на вход системы наблюдения смеси аддитивного Гауссового и импульсного шума, а также при наличии случайного смещения исходного сигнала.

Визуальный анализ данных результатов позволяет отметить существенное просачивание импульсной компоненты шума на выход системы восстановления сигналов при использовании метода № 1 (см. рис. 10). Наличие импульсного шума полностью маскирует "информационный" импульс сигнальной составляющей, обнаружение которого для полученного выходного (восстановленного) сигнала практически невозможно.

В то же самое время предлагаемые методы №№ 2 и 3 обеспечивают гораздо лучшее подавление импульсной компоненты шума и тем самым дают возможность более надежного обнаружения и распознавания информационного импульса $A1$. Это позволяет сделать заключение об эффективности предложенных методов не только для обработки сигналов на фоне Гауссовых шумов, но и для решения задач обнаружения и распознавания слабых сигналов в условиях воздействия интенсивного смешанного (Гауссова и импульсного) шума.

4. Заключение

Традиционный метод восстановления сигналов по оценкам биспектров представляется, в целом, перспективным инструментом обработки сигналов вследствие возможности сохранения и восстановления фазовой информации, из-за низкой чувствительности к аддитивному Гауссовому шуму, а также в силу инвариантности к случайным сдвигам исходного сигнала. Кроме того, биспектральный метод восстановления сигналов не требует количественной априорной информации о статистических свойствах наблюдаемых процессов. Естественно, эффективность биспектрального анализа во многих практических ситуациях снижается, например, когда отношения сигнал/шум (для случая Гауссовых помех) меньше единицы или когда статистика аддитивного шума отличается от нормального закона распределения. Однако, как показано выше, и в этих случаях применение биспектральных и предложенных нами комбинированных биспектрально-фильтрационных методов обработки приводит к заметному улучшению качества восстановления сигналов. При этом предложенные методы восстановления сигналов, для которых после восстановления сигнальных фазового и амплитудного спектров проводится сглаживание этих спектров линейным или нелинейным фильтрами с различными размерами скользящих окон, сохраняют все отмеченные выше преимущества биспектрального анализа.

Результаты численного моделирования и проведенный сравнительный анализ демонстрируют улучшение устойчивости (по сравнению с традиционной биспектральной обработкой) предложенных комбинированных методов восстановления сигналов по отношению как к шумам с нормальным законом распределения, так и по отношению к негауссовым шумам смешанного типа. Предложенный нами подход позволяет реализовать метод восстановления сигналов, в котором интегрированы преимущества биспектрального анализа и достоинства линейной и нелинейной фильтрации в скользящем окне.

Предложенные комбинированные методы могут быть рекомендованы для обработки сигналов в системах, подверженных воздействию интенсивных Гауссовых и негауссовых шумов в условиях априорной неопределенности о количественных статистических характеристиках сигналов и шумов, например, для радиолокационных или гидролокационных систем, а также для астрономических систем для решения задач обнаружения малоразмерных объектов.

Разработан пакет прикладных программ для восстановления одномерных сигналов. Удобный и гибкий интерфейс позволяет в интерактивном режиме наблюдать, а также сохранять исследуемые процессы, оценки ТАКФ, амплитудный и фазовый биспектры, восстановленные по оценкам биспектрам фазовые и амплитудные Фурье-спектры сигналов. Также предусмотрена возможность формировать и анализировать гистограммы на различных этапах обработки. Для сравнительного анализа предусмотрены опции расчета точностных параметров системы восстановления сигналов. В блок фильтрации в настоящий момент встроены различные типы линейных и нелинейных алгоритмов фильтрации, имеются возможности оперативного расширения уже созданного банка фильтров.

Литература

- [1] *Василенко Г. И., Тараторин А. М.* Восстановление изображений. – М.: Радио и связь, 1986.
- [2] *Andrews H. C., and Hunt B. R.*, Digital Image Restoration. Prentice–Hall, Englewood Cliffs, NJ 1977.
- [3] *Frieden B. R.*, Image enhancement and restoration, in Picture Processing and Digital Processing, T.S. Huang, Ed. Berlin: Springer–Verlag, 1975, pp. 177–248.
- [4] *Тихонов А. Н., Арсенин В. Я.* Методы решения некорректных задач. - М.: Наука, 1986.

- [5] *Katsaggelos A. K., Biemond J., Schafer R. W., and Mersereau R. M.*, A regularized iterative image restoration algorithm, *IEEE Trans. Signal Process.* SP-39, Apr. 1991, pp. 914 – 929.
- [6] *Mesarovic V. Z., Galatsanos N. P., and Katsaggelos A. K.*, Regularized constrained total least squares image restoration, *IEEE Trans. Image Process.* vol. 4, No. 8, Aug. 1995, pp. 1096 – 1108.
- [7] *Melnik V. P., Lukin V. V., Zelensky A. A., Huttunen H., and Astola J.*, Nonlinear locally adaptive and iterative algorithms of image restoration, *Journal of Electronic Imaging*, 6(4), Oct. 1997, pp. 439 – 452.
- [8] *Zervakis M.E., and Venetsopoulos A.N.*, A class of noniterative estimators for nonlinear image restoration, *IEEE Trans. Circ. Syst. CAS-38*, 1991, pp. 731 – 744.
- [9] *Astola J., and Kuosmanen P.*, *Fundamentals of Nonlinear Digital Filtering*. CRC Press LLC, N.Y. Boca Raton, 1997.
- [10] *Astola J., Heinonen P., and Neuvo Y.*, On root structures of median and median-type filters, *IEEE Trans. Acoust., Speech, Signal Processing*, vol. ASSP-35, Aug. 1987, pp. 1199 – 1201.
- [11] *Bovik A. C., Huang T.S., and Munson D. C.*, Nonlinear filtering using linear combinations of order statistics, in *Proc. 1982 IEEE Int. Conf. on Acoustic, Speech and Signal Processing*, Paris, May 1982, pp. 2067 – 2070.
- [12] *Pitas I., and Venetsanopoulos A. N.*, *Nonlinear Digital Filters: Principles and Applications*, Kluwer Academic Publishers, Boston, 1990.
- [13] *Sasaki K., Sato T., and Nakamura Y.*, Holographic passive sonar, *IEEE Trans. Sonics Ultrasonics*, SU-24, May, 1977, pp. 193 – 200.
- [14] *Lohman A.W., Weigelt G., and Wiruitzer B.*, Speckle masking in astronomy: triple correlation theory and applications, *Applied Optics*, vol. 22, Dec. 1983, pp. 4028 – 4037.
- [15] *Bartelt H., Lohman A. W., and Wirnitzer B.*, Phase and amplitude recovery from bispectra, *Applied Optics*, vol. 23, Sept. 1984, pp. 3121–3129.
- [16] *Nikias C. L., and Raghuvver M. R.*, Bispectral estimation: A digital signal processing framework, *Proc. IEEE*, vol. 75, No 7, July 1987, pp. 869 – 891.
- [17] *Tockij A. V., Peřina J., and Zabuga S. I.*, Super-resolution in incoherent systems of image restoration with noise by bispectral data processing, *Optik*, vol. 83, No. 3, 1988, pp. 85–87.
- [18] *Sundaramoorthy G., Raghuvver M. R., and Diant S. A.*, Bispectral reconstruction of signals in noise: Amplitude reconstruction issues, *IEEE Trans. Acoustics, Speech, and Signal Processing*, vol. 38, No 7, July 1990, pp. 1297-1306
- [19] *Важинский В. Н., Тетерин В. В.*, Корреляционная функция третьего порядка и биспектр в задачах обработки сигналов, *ОМП*, 1991, № 4, с. 4 – 14.
- [20] *Nakamura M.*, Waveform estimation from noisy signals with variable signal delay using bispectrum averaging, *IEEE Trans. on Biomedical Engineering*, vol. 40, No 2, February 1993, pp. 118-127

[21] *Petropulu A. P., and Abeyratne U. R.*, System reconstruction from higher order spectra slices, IEEE Trans. on Signal Processing, vol. 45, No 9, September 1997, pp. 2241-2251

[22] *Totsky A.V., and Gorbunenko B. F.*, Investigations of the synthetic aperture radar images formed by processing of bispectral data, International Journal of Electronics and Communications, (AEÜ), vol. 53, No. 3, 1999, pp. 146–150.

[23] *Zhang Ji-Wu, Zheng Chong-Xun, and Xie Au*, Bispectrum analysis of focal ischemic cerebral EEG signal using third-order recursion method, IEE Trans. Biomedical Engineering, vol. 47, No. 3, March 2000, pp. 352 – 359.

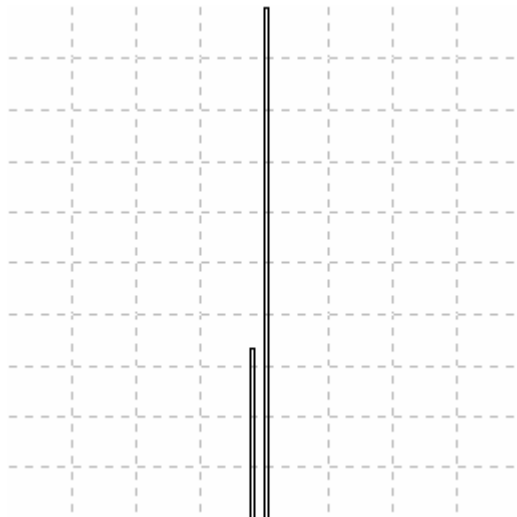


Рис. 1. Свободный от искажений исходный тестовый сигнал.

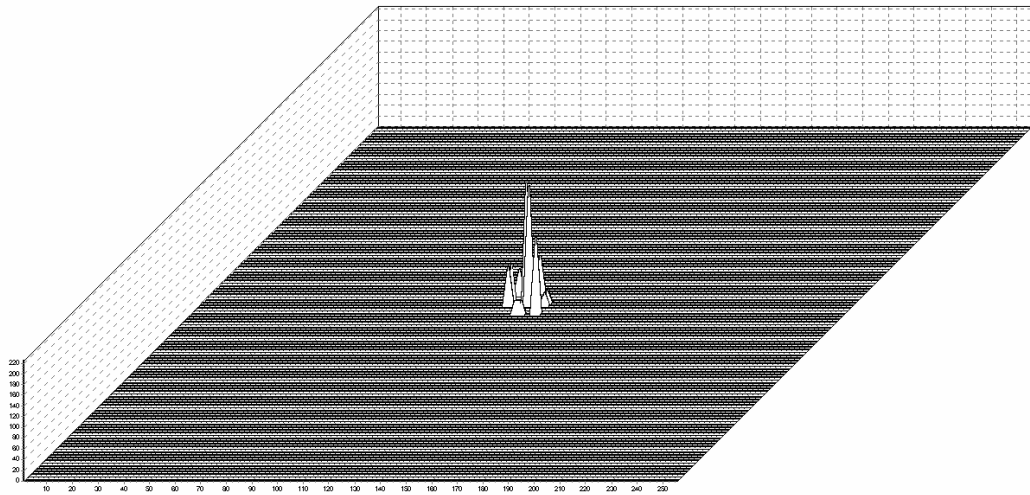


Рис. 2. Тройная автокорреляционная функция свободного от искажений тестового сигнала.

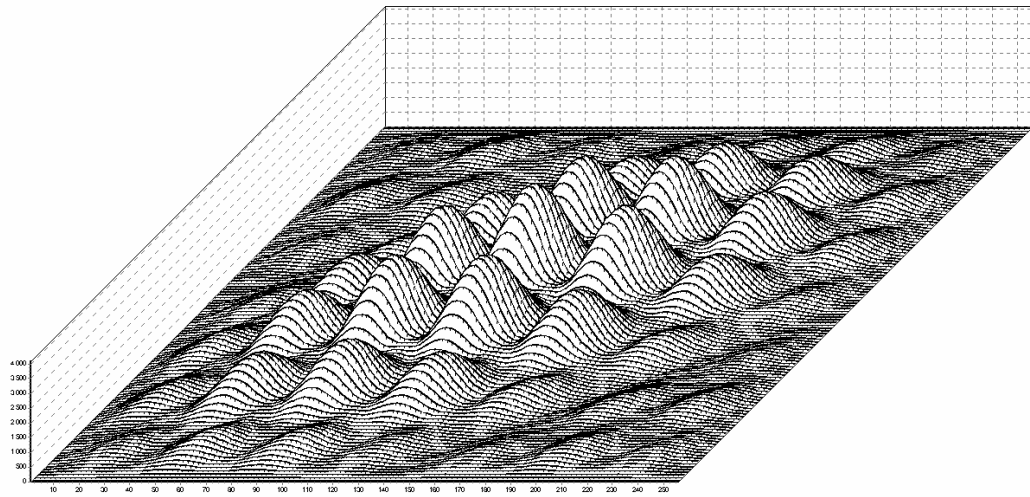


Рис. 3. Амплитудный биспектр свободного от искажений исходного тестового сигнала.

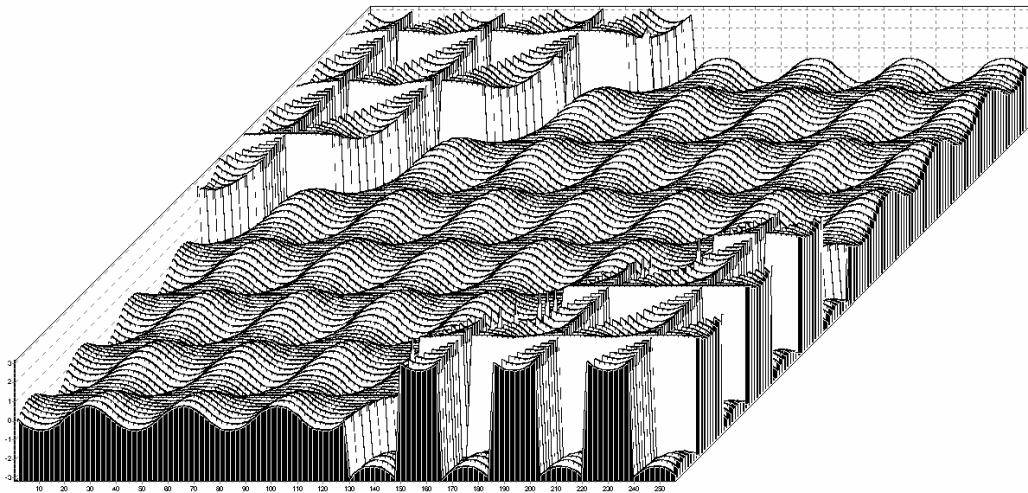


Рис. 4. Фазовый биспектр свободного от искажений исходного тестового сигнала.

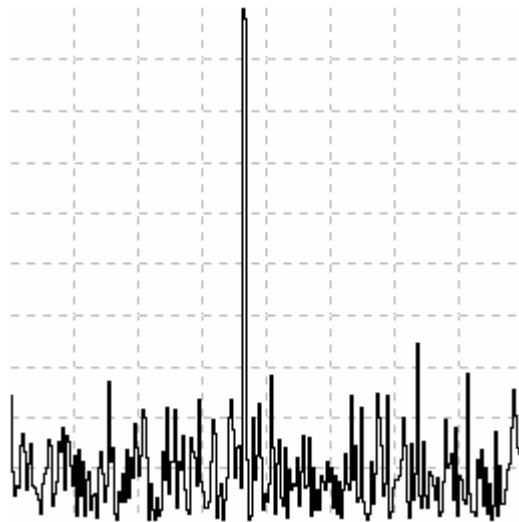


Рис. 5. Реализация тестового сигнала, искаженного аддитивным Гауссовым шумом с нулевым средним значением, с дисперсией $\sigma_{inp}^{(m)2}=0.492$ и случайным смещением относительно исходного сигнала.

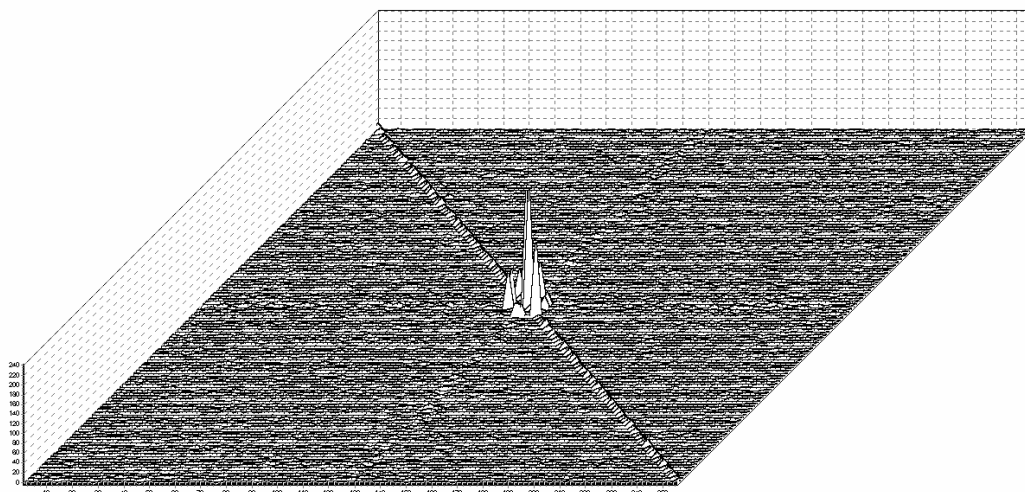


Рис. 6. Оценка тройной автокорреляционной функции сигнала, искаженного аддитивным Гауссовым шумом с нулевым средним значением, с дисперсией $\overline{\sigma}_{inp}^2 = 0.5$ и случайным смещением относительно исходного сигнала.

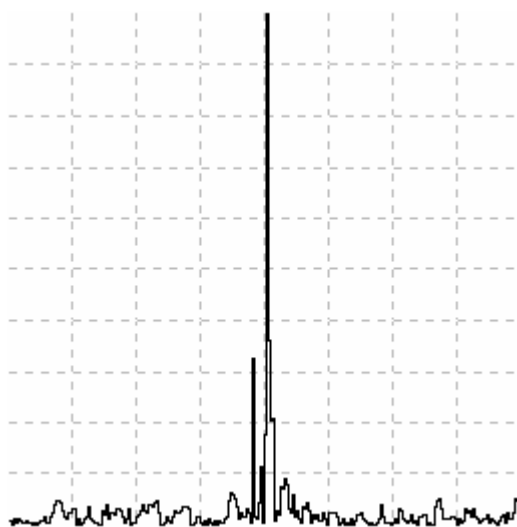


Рис. 7. Сигнал, восстановленный с помощью известного Метода №1: $\overline{SNR}_{inp} = 1.92$, $\overline{SNR}_{out} = 5.61$ и $\varepsilon = 2.921$.

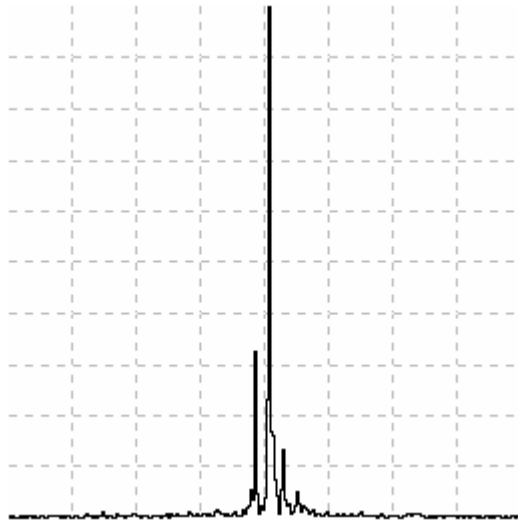


Рис. 8. Сигнал, восстановленный с помощью предложенного Метода №2: $\overline{SNR}_{inp} = 1.91$, $\overline{SNR}_{out} = 5.07$, $\varepsilon = 2.65$ и $2N+1=9$.

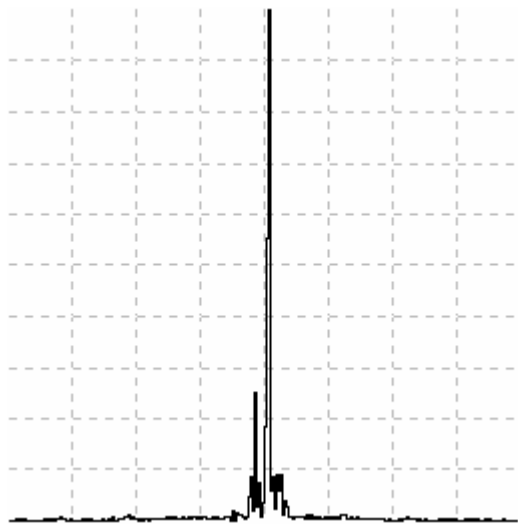


Рис. 9. Сигнал, восстановленный с помощью предложенного Метода №3: $\overline{SNR}_{inp} = 1.92$, $\overline{SNR}_{out} = 9.73$, $\varepsilon = 5.07$ и $2N+1=9$.

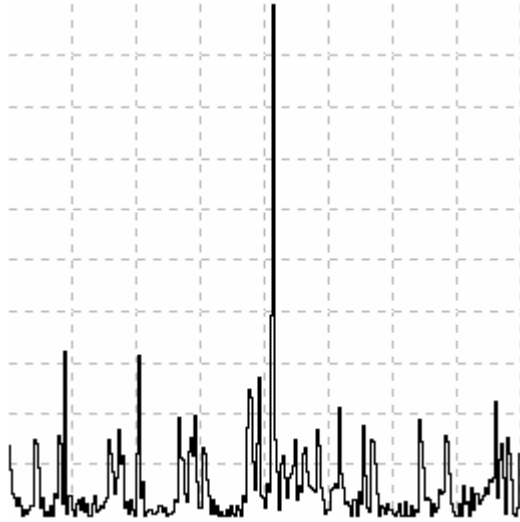


Рис. 10. Сигнал, восстановленный с помощью известного Метода №1: $\overline{SNR}_{inp}=1.4$, $\overline{SNR}_{out}=2.75$, $\mathcal{E}=1.97$, $A_{pos}=2$, $A_{neg}=0$, $P_{pos}=P_{neg}=10\%$.

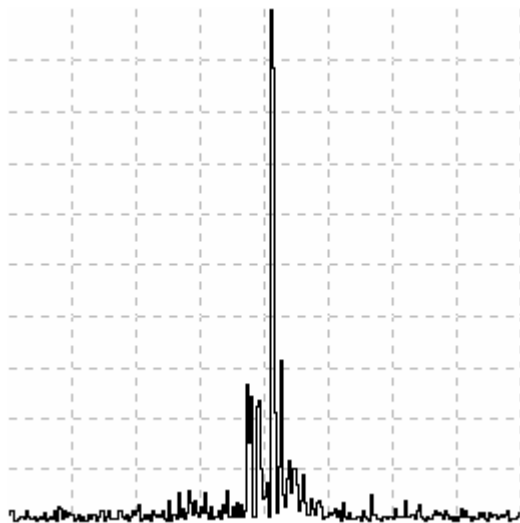


Рис. 11. Сигнал, восстановленный с помощью предложенного Метода №2: $\overline{SNR}_{inp}=1.39$, $\overline{SNR}_{out}=8.84$, $\mathcal{E}=6.34$, $A_{pos}=2$, $A_{neg}=0$, $P_{pos}=P_{neg}=10\%$, $2N+1=9$.

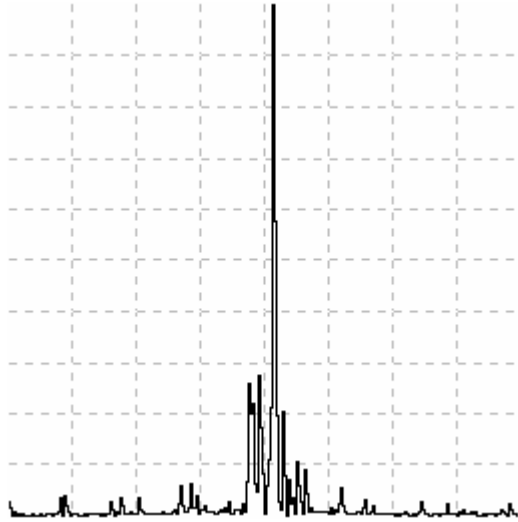


Рис. 12. Сигнал, восстановленный с помощью предложенного Метода №3: $\overline{SNR}_{inp} = 1.38$, $\overline{SNR}_{out} = 8.77$, $\mathcal{E} = 6.35$, $A_{pos} = 2$, $A_{neg} = 0$, $P_{pos} = P_{neg} = 10\%$, $2N+1 = 9$.