И.П. Заикин, А.А. Ткаченко, А.В. Тоцкий

СБОРНИК ЗАДАЧ
ПО ТЕХНИЧЕСКОЙ ЭЛЕКТРОДИНАМИКЕ

2009

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ УКРАИНЫ
Национальный аэрокосмический университет им. Н.Е. Жуковского
“Харьковский авиационный институт”

И.П. Заикин, А.А. Ткаченко, А.В. Тоцкий

СБОРНИК ЗАДАЧ
ПО ТЕХНИЧЕСКОЙ ЭЛЕКТРОДИНАМИКЕ

Харьков “ХАИ” 2009

УДК 537.8 (076.1)

Заикин И.П. Сборник задач по технической электродинамике / И.П. Заикин, А.А. Ткаченко, А.В. Тоцкий. – Х.: Нац. аэрокосм. ун-т "Харьк. авиац. ин-т, 2009. – 94 с.

Приведены решения задач по основным уравнениям электродинамики, плоским электромагнитным волнам в свободном пространстве, двухпроводным, коаксиальным и волноводным линиям передачи и согласующим устройствам на их основе, а также по фазирующим и поляризационным устройствам. Даны варианты задач для самостоятельного решения.

Для студентов, специализирующихся в области радиоэлектронных систем и комплексов, технологий и средств телекоммуникаций, а также информационных сетей связи.

Ил. 27 . Табл. 4 . Библиогр.: 8 назв.

Р е ц е н з е н т ы: д-р физ.-мат. наук, проф. Н.Н. Горобец,
д-р техн. наук Г.И. Хлопов

© Национальный аэрокосмический университет им. Н.Е. Жуковского "Харьковский авиационный институт", 2009 г.

1. ОСНОВЫ ЭЛЕКТРОДИНАМИКИ

1.1. Записать первое и второе уравнения Максвелла в декартовой системе координат [1].

Р е ш е н и е. Первое и второе уравнения Максвелла в дифференциальной форме имеют вид

$$\mathrm{rot}\vec{H} = \vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}, \tag{1.1}$$

$$\mathrm{rot}\vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, \tag{1.2}$$

где $\vec{H}$ и $\vec{E}$ - векторы напряженности магнитного и электрического поля;

$\vec{j}$ - вектор плотности тока проводимости;

$\vec{D}$ - вектор электрического смещения;

$\vec{B}$ - вектор магнитной индукции.

В декартовой системе координат эти уравнения записывают так:

- первое уравнение

$$\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ H_x & H_y & H_z \end{vmatrix} = \vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}, \tag{1.3}$$

- второе уравнение

$$\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ E_x & E_y & E_z \end{vmatrix} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, \tag{1.4}$$

где $\vec{i}$, $\vec{j}$ и $\vec{k}$ – орты декартовой системы координат.

Представляя векторы $\vec{j}, \vec{D}$ и $\vec{B}$ в виде

$$\vec{j} = \vec{i}j_x + \vec{j}j_y + \vec{k}j_z;$$

$$\vec{D} = \vec{i}D_x + \vec{j}D_y + \vec{k}D_z;$$

$$\vec{B} = \vec{i}B_x + \vec{j}B_y + \vec{k}B_z,$$

учитывая материальные уравнения

$$\vec{D} = \varepsilon_a \vec{E}, \quad \vec{B} = \mu_a \vec{H}, \tag{1.5}$$

где ε_a и μ_a - абсолютные диэлектрическая и магнитная проницаемости среды, и гармоническую временную зависимость

$$\vec{D} = \vec{D}_m e^{i\omega t}, \quad \vec{B} = \vec{B}_m e^{i\omega t}, \tag{1.6}$$

где $\omega = 2\pi f$ - круговая частота, найдем:

- для первого уравнения

$$\begin{aligned} &\frac{\partial H_z}{\partial y} - \frac{\partial H_y}{\partial z} = j_x + i\omega\varepsilon_a E_x; \\ &\frac{\partial H_x}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial x} = j_y + i\omega\varepsilon_a E_y; \\ &\frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y} = j_z + i\omega\varepsilon_a E_z; \end{aligned} \tag{1.7}$$

- для второго уравнения

$$\begin{aligned} &\frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} = -i\omega\mu_a H_x; \\ &\frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x} = -i\omega\mu_a H_y; \\ &\frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} = -i\omega\mu_a H_z. \end{aligned} \tag{1.8}$$

1.2. Дано электрическое поле с неизменным направлением вектора $\vec{H}$. Показать, что вектор плотности полного тока перпендикулярен вектору $\vec{H}$ [2].

Р е ш е н и е. Направим одну из осей декартовой системы координат (например ось z) параллельно вектору $\vec{H}$. Тогда

$$\vec{H} = \vec{k}H_z,$$

а составляющие

$$H_y = H_x = 0.$$

Из третьего уравнения системы (1.7) следует, что $E_z = 0$, значит,

$$\vec{E} = \vec{i}E_x + \vec{j}E_y,$$

т.е. плотность полного тока

$$\vec{j} + i\omega\varepsilon_a\vec{E} = \vec{i}(j_x + i\omega\varepsilon_a E_x) + \vec{j}(j_y + i\omega\varepsilon_a E_y)$$

и находится в плоскости, перпендикулярной вектору $\vec{H}$.

1.3. Записать первое и второе уравнения Максвелла в цилиндрической системе координат [1].

Р е ш е н и е. Уравнения (1.1) и (1.2) в цилиндрической системе координат ρ, φ, z можно записать так:

- первое уравнение

$$\begin{vmatrix} \frac{\vec{i}}{\rho} & \vec{j} & \frac{\vec{k}}{\rho} \\ \frac{\partial}{\partial\rho} & \frac{\partial}{\partial\varphi} & \frac{\partial}{\partial z} \\ H_\rho & \rho H_\varphi & H_z \end{vmatrix} = \vec{j} + \frac{\partial\vec{D}}{\partial t}, \qquad (1.9)$$

- второе уравнение

$$\begin{vmatrix} \frac{\vec{i}}{\rho} & \vec{j} & \frac{\vec{k}}{\rho} \\ \frac{\partial}{\partial\rho} & \frac{\partial}{\partial\varphi} & \frac{\partial}{\partial z} \\ E_\rho & \rho E_\varphi & E_z \end{vmatrix} = -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}. \qquad (1.10)$$

Представим векторы $\vec{j}$, $\vec{D}$ и $\vec{B}$ в виде

$$\vec{j} = \vec{\rho}^{\,o} j_\rho + \vec{\varphi}^{\,o} j_\varphi + \vec{z}^{\,o} j_z;$$

$$\vec{D} = \vec{\rho}^{\,o} D_\rho + \vec{\varphi}^{\,o} D_\varphi + \vec{z}^{\,o} D_z;$$

$$\vec{B} = \vec{\rho}^{\,o} B_\rho + \vec{\varphi}^{\,o} B_\varphi + \vec{z}^{\,o} B_z,$$

где $\vec{\rho}^{\,o}$, $\vec{\varphi}^{\,o}$, $\vec{z}^{\,o}$ - орты цилиндрической системы координат. Тогда с учетом материальных уравнений (1.5) и гармонической зависимости от времени (1.6) найдем:

- для первого уравнения

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial H_z}{\partial\varphi} - \frac{\partial H_\varphi}{\partial z} = j_\rho + i\omega\varepsilon_a E_\rho;$$

$$\frac{\partial H_\rho}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial\rho} = j_\varphi + i\omega\varepsilon_a E_\varphi; \qquad (1.11)$$

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial(\rho H_\varphi)}{\partial\rho} - \frac{1}{\rho}\frac{\partial H_\rho}{\partial\varphi} = j_z + i\omega\varepsilon_a E_z;$$

- для второго уравнения

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial E_z}{\partial\varphi} - \frac{\partial E_\varphi}{\partial z} = -i\omega\mu_a H_\rho;$$

$$\frac{\partial E_\rho}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial\rho} = -i\omega\mu_a H_\varphi; \qquad (1.12)$$

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial(\rho E_\varphi)}{\partial\rho} - \frac{1}{\rho}\frac{\partial E_\rho}{\partial\varphi} = -i\omega\mu_a H_z.$$

1.4. Записать первое и второе уравнения Максвелла в сферической системе координат.

Р е ш е н и е. Уравнения (1.1) и (1.2) в сферической системе координат r, θ, φ записывают так:

- уравнение (1.1)

$$\begin{vmatrix} \dfrac{\vec{i}}{r^2 \sin\theta} & \dfrac{\vec{j}}{r\sin\theta} & \dfrac{\vec{k}}{r} \\ \dfrac{\partial}{\partial r} & \dfrac{\partial}{\partial\theta} & \dfrac{\partial}{\partial\varphi} \\ H_r & rH_\theta & r\sin\theta H_\varphi \end{vmatrix} = \vec{j} + \frac{\partial\vec{D}}{\partial t}; \qquad (1.13)$$

- уравнение (1.2)

$$\begin{vmatrix} \dfrac{\vec{i}}{r^2 \sin\theta} & \dfrac{\vec{j}}{r\sin\theta} & \dfrac{\vec{k}}{r} \\ \dfrac{\partial}{\partial r} & \dfrac{\partial}{\partial\theta} & \dfrac{\partial}{\partial\varphi} \\ E_r & rE_\theta & r\sin\theta E_\varphi \end{vmatrix} = -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}. \qquad (1.14)$$

Запишем векторы $\vec{j}$, $\vec{D}$ и $\vec{B}$ как

$$\vec{j} = \vec{r}^{\,o} j_r + \vec{\theta}^{\,o} j_\theta + \vec{\varphi}^{\,o}\, j_\varphi;$$

$$\vec{D} = \vec{r}^{\,o} D_r + \vec{\theta}^{\,o} D_\theta + \vec{\varphi}^{\,o}\, D_\varphi;$$

$$\vec{B} = \vec{r}^{\,o} B_r + \vec{\theta}^{\,o} B_\theta + \vec{\varphi}^{\,o}\, B_\varphi,$$

где $\vec{r}^{\,o}$, $\vec{\theta}^{\,o}$, $\vec{\varphi}^{\,o}$ - орты сферической системы координат. Тогда с учетом материальных уравнений (1.5) и гармонической временной зависимости (1.6) :

- для уравнения (1.1)

$$\frac{1}{r\sin\theta}\left\{\frac{\partial(\sin\theta H_\varphi)}{\partial\theta} - \frac{\partial H_\theta}{\partial\varphi}\right\} = j_r + i\omega\omega_a E_r;$$

$$\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial H_r}{\partial\varphi} - \frac{1}{r}\frac{\partial(rH_\varphi)}{\partial r} = j_\theta + i\omega\omega_a E_\theta; \qquad (1.15)$$

$$\frac{1}{r}\left\{\frac{\partial(rH_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial H_r}{\partial\theta}\right\} = j_\varphi + i\omega\omega_a E_\varphi;$$

- для уравнения (1.2)

$$\frac{1}{r\sin\theta}\left\{\frac{\partial(\sin\theta E_\varphi)}{\partial\theta}-\frac{\partial E_\theta}{\partial\varphi}\right\}=-i\omega\omega_a H_r;$$

$$\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial E_r}{\partial\varphi}-\frac{1}{r}\frac{\partial(rE_\varphi)}{\partial r}=-i\omega\omega_a H_\theta; \qquad (1.16)$$

$$\frac{1}{r}\left\{\frac{\partial(rE_\theta)}{\partial r}-\frac{\partial E_r}{\partial\theta}\right\}=-i\omega\omega_a H_\varphi.$$

1.5. Определить вектор электрического смещения на расстоянии r от точечного заряда q [2].

Р е ш е н и е. Заряд служит началом всех линий вектора электрического смещения. Из соображений симметрии следует, что это радиальные прямые, идущие с одинаковой плотностью (рис. 1.1).

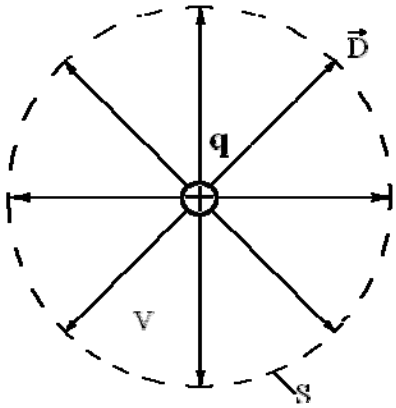


Рис. 1.1

Воспользуемся третьим уравнением Максвелла в дифференциальной форме

$$\mathrm{div}\vec{D}=\rho, \qquad (1.17)$$

где ρ - объемная плотность заряда, и проинтегрируем его по объему V, заключенному внутри поверхности S:

$$\int_V \mathrm{div}\vec{D}dv=\int_V \rho dv. \qquad (1.18)$$

Используя в формуле (1.18) теорему Гаусса - Остроградского

$$\int_V \mathrm{div}\vec{D}dv=\oint_S \vec{D}d\vec{s},$$

где $d\vec{s}=\vec{n}ds$, а также определение

$$q=\int_V \rho dv, \qquad (1.19)$$

находим

$$\oint_S \vec{D}d\vec{s}=q. \qquad (1.20)$$

Выражение (1.20) представляет собой закон Гаусса или третье уравнение Максвелла в интегральной форме, согласно которому поток вектора электрического смещения через произвольную замкнутую поверхность S с зарядом q, сосредоточенным внутри этой поверхности, равен этому заряду.

При неограниченном уменьшении V вектор $\vec{D}$ внутри S можно считать постоянным и вынести его за знак интеграла. Тогда

$$D \cdot 4\pi r^2 = q \quad \Rightarrow \quad D = \frac{q}{4\pi r^2}.$$

1.6. Определить величину напряженности магнитного поля на расстоянии $r = 1\text{м}$ от постоянного прямолинейного тока $I = 1\text{A}$ (рис. 1.2) [2].

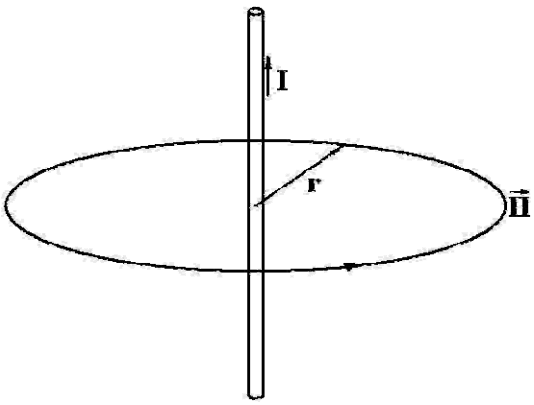


Рис. 1.2

Р е ш е н и е. Линии магнитной индукции имеют вид замкнутых кривых. Из соображений симметрии вытекает, что это концентрические окружности, лежащие в плоскостях, перпендикулярных линии тока, и охватывающие его. Если окружающая среда – вакуум, то $\vec{B} = \mu_0 \vec{H}$, следовательно, такой же вид имеют и линии вектора $\vec{H}$.

Из первого уравнения Максвелла в интегральной форме

$$\oint_L \vec{H} d\vec{\ell} = \frac{d}{dt}\int_S \vec{D} d\vec{s} + \int_S \vec{j} d\vec{s}$$

следует, что в случае постоянного тока (d/dt = 0)

$$\oint_L \vec{H} d\vec{\ell} = \int_S \vec{j} d\vec{s} = I,$$

где $I = \int_S \vec{j} d\vec{s}$ - поток вектора плотности тока проводимости через поверхность S, т.е. ток проводимости, пересекающий эту поверхность.

Вычисляя циркуляцию $\vec{H}$ по контуру L, совпадающему с одной из линий вектора $\vec{H}$, находим

$$\oint_L \vec{H} d\vec{\ell} = H \cdot 2\pi r,$$

тогда

$$H = \frac{I}{2\pi r}$$

и на расстоянии 1 м от прямолинейного постоянного тока в 1 А напряженность магнитного поля $1/2\pi$ А/м.

1.7. Кусок стекла, имеющий относительную диэлектрическую проницаемость $\varepsilon = 4$ и удельную проводимость $\sigma = 10^{-12}$ См/м, в некоторый момент времени имеет объемно распределенный заряд. Определить время, в течение которого заряд в любой точке внутренней области уменьшится в **e** раз [3].

Р е ш е н и е. Применим закон сохранения заряда (уравнение непрерывности)

$$\mathrm{div}\vec{j} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0.$$

Используя закон Ома в дифференциальной форме

$$\vec{j} = \sigma \vec{E},$$

получаем

$$\sigma \mathrm{div}\vec{E} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0.$$

На основании третьего уравнения Максвелла

$$\mathrm{div}\vec{D} = \rho$$

и с учетом материального уравнения

$$\vec{D} = \varepsilon\varepsilon_0 \vec{E}$$

находим

$$\frac{\sigma}{\varepsilon\varepsilon_0}\rho + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \quad \text{или} \quad \frac{d\rho}{\rho} = -\frac{\sigma}{\varepsilon\varepsilon_0} dt.$$

Проинтегрируем последнее уравнение

$$\ln \rho + C = -\frac{\sigma}{\varepsilon\varepsilon_0} t,$$

где постоянную интегрирования C из соображений удобства выберем равной $C = \ln(1/\rho_0)$. Тогда

$$\ln\left(\frac{\rho}{\rho_0}\right) = -\frac{\sigma}{\varepsilon\varepsilon_0} t \quad \Rightarrow \quad \rho = \rho_0 e^{-\frac{\sigma}{\varepsilon\varepsilon_0} t},$$

где ρ_0 можно определить как плотность заряда в начальный момент времени.

По условию задачи

$$\rho_0 e^{-\frac{\sigma}{\varepsilon\varepsilon_0}t} = \frac{\rho_0}{e} = \rho_0 e^{-1} \;\Rightarrow\; -\frac{\sigma}{\varepsilon\varepsilon_0} t \ln e = -\ln e \;\Rightarrow\; t = \frac{\varepsilon\varepsilon_0}{\sigma}.$$

Тогда за время

$$t = \frac{\varepsilon\varepsilon_0}{\sigma} = \frac{4\cdot 10^{-9}}{36\pi\cdot 10^{-12}} = 35{,}4\,\text{с}$$

объемная плотность заряда в данной точке уменьшится в **е** раз. Это время называется ***временем релаксации***. Уменьшение плотности заряда внутри диэлектрика объясняется их перемещением на поверхность диэлектрика вследствие взаимодействия одноименных зарядов.

1.8. Определить отношение плотности тока смещения к плотности тока проводимости в морской воде ($\varepsilon = 80,\ \mu = 1,\ \sigma = 4\,\text{См/м}$) для волн с частотами $f_1 = 10\,\text{КГц},\ f_2 = 1\,\text{МГц},\ f_3 = 0{,}1\,\text{ГГц}$ [4].

Р е ш е н и е. В первом уравнении Максвелла в дифференциальной форме

$$\text{rot}\vec{H} = \vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$$

первое слагаемое в правой части представляет собой вектор плотности тока проводимости, который в соответствии с законом Ома в дифференциальной форме равен

$$\vec{j} = \vec{j}_{\text{пр}} = \sigma\vec{E}.$$

Второе слагаемое в правой части – это вектор плотности тока смещения, который после использования соотношений (1.5), (1.6)

$$\vec{D} = \varepsilon\varepsilon_0\vec{E}, \qquad \vec{D} = \vec{D}_m e^{i\omega t}$$

запишем так:

$$\vec{j}_{\text{см}} = i\omega\varepsilon\varepsilon_0\vec{E}.$$

Таким образом, амплитуды плотностей тока проводимости и тока смещения имеют вид

$$j_{\text{пр}} = \sigma E, \qquad j_{\text{см}} = \omega\varepsilon\varepsilon_0 E,$$

а их отношение

$$\frac{j_{\text{см}}}{j_{\text{пр}}} = \frac{\omega\varepsilon\varepsilon_0}{\sigma}. \tag{1.21}$$

Тогда получим:

- для частоты $f_1 = 10\,\text{КГц} = 10^4\,\text{Гц}$

$$\left(\frac{j_{\text{см}}}{j_{\text{пр}}}\right)_1 = \frac{2\pi\cdot 10^4\cdot 80\cdot 10^{-9}}{36\pi\cdot 4} = 1{,}11\cdot 10^{-5};$$

- для частоты $f_2 = 1\,\text{МГц} = 10^6\ \text{Гц}$

$$\left(\frac{j_{см}}{j_{пр}}\right)_2 = \frac{2\pi \cdot 10^6 \cdot 80 \cdot 10^{-9}}{36\pi \cdot 4} = 1{,}11 \cdot 10^{-3};$$

- для частоты $f_3 = 0{,}1\,\text{ГГц} = 10^8\,\text{Гц}$

$$\left(\frac{j_{см}}{j_{пр}}\right)_3 = \frac{2\pi \cdot 10^8 \cdot 80 \cdot 10^{-9}}{36\pi \cdot 4} = 0{,}11.$$

1.9. Определить для частоты $f = 600\,\text{МГц}$ комплексную диэлектрическую проницаемость среды ε', которая имеет относительную проницаемость $\varepsilon = 50$ и удельную проводимость $\sigma = 4 \cdot 10^{-3}\ \text{См/м}$. Найти соотношение между токами смещения и проводимости в данной среде [4].

Р е ш е н и е. Из первого уравнения Максвелла следует

$$\text{rot}\vec{H} = \vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} = \sigma\vec{E} + \varepsilon_a \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \sigma\vec{E} + i\omega\varepsilon_a\vec{E} = (\sigma + i\omega\varepsilon_a)\vec{E} = i\omega\varepsilon'_a\vec{E},$$

откуда

$$i\omega\varepsilon'_a = \sigma + i\omega\varepsilon_a \ \Rightarrow\ \varepsilon'_a = \frac{\sigma + i\omega\varepsilon_a}{i\omega} = \varepsilon_a + \frac{\sigma}{i\omega} = \varepsilon_a - i\frac{\sigma}{\omega}.$$

Тогда относительная комплексная диэлектрическая проницаемость среды

$$\varepsilon' = \frac{\varepsilon'_a}{\varepsilon_0} = \frac{\varepsilon_a}{\varepsilon_0} - i\frac{\sigma}{\omega\varepsilon_0} = \varepsilon - i\frac{\sigma}{2\pi f\varepsilon_0} = \varepsilon - i\frac{\sigma\lambda}{2\pi c\varepsilon_0} = \varepsilon - i\frac{\sigma\lambda \cdot 36\pi}{2\pi \cdot 3 \cdot 10^8 \cdot 10^{-9}} =$$

$$= \varepsilon - i60\sigma\lambda, \qquad (1.22)$$

где

$$\lambda = \frac{c}{f} = \frac{3 \cdot 10^8}{6 \cdot 10^8} = 0{,}5\,\text{м}.$$

Соотношение между токами смещения и проводимости определяется выражением

$$\left|\frac{j_{см}}{j_{пр}}\right| = \frac{\varepsilon}{60\sigma\lambda}$$

и равно

$$\left|\frac{j_{см}}{j_{пр}}\right| = \frac{50}{60 \cdot 4 \cdot 10^{-3} \cdot 0{,}5} \approx 417.$$

1.10. Между обкладками плоского конденсатора с воздушным заполнением и площадью одной пластины S = 80 см^2 сосредоточено синусоидально изменяющееся электрическое поле, амплитуда которого

$E_m = 10^8$ В/м. Какой будет амплитуда тока смещения конденсатора при частотах поля $f_1 = 50$ Гц, $f_2 = 50$ МГц, $f_3 = 500$ МГц и $f_4 = 1$ ГГц ?

Р е ш е н и е. Из выражения для мгновенного значения напряженности электрического поля

$$E = E_m \sin \omega t,$$

пользуясь материальным уравнением (1.5)

$$D = \varepsilon_a E,$$

находим мгновенное значение плотности тока смещения

$$j_{см} = \frac{\partial D}{\partial t} = \varepsilon_a \frac{\partial E}{\partial t} = \varepsilon_a \omega E_m \cos \omega t,$$

где $\omega = 2\pi f$ - круговая частота колебаний.

Ток смещения

$$I_{см} = j_{см} S = S\omega\varepsilon_a E_m \cos \omega t.$$

Для воздушного конденсатора

$$\varepsilon_a = \varepsilon_0 = \frac{10^{-9}}{36\pi} \Phi / м,$$

тогда амплитуда тока смещения определяется выражением

$$I_{mсм} = S\omega\varepsilon_0 E_m = 2\pi f S \varepsilon_0 E_m$$

и численно равна:

- для частоты $f_1 = 50\,Гц$

$$\left(I_{mсм}\right)_1 = \frac{2\pi \cdot 50 \cdot 80 \cdot 10^{-4} \cdot 10^{-9} \cdot 10^8}{36\pi} = 2{,}22 \cdot 10^{-3}\ А = 2{,}22\,мА;$$

- для частоты $f_2 = 50\,МГц = 50 \cdot 10^6$ Гц

$$\left(I_{mсм}\right)_2 = \frac{2\pi \cdot 50 \cdot 10^6 \cdot 80 \cdot 10^{-4} \cdot 10^{-9} \cdot 10^8}{36\pi} = 2{,}22 \cdot 10^3\ А;$$

- для частоты $f_3 = 500\,МГц = 500 \cdot 10^6$ Гц

$$\left(I_{mсм}\right)_3 = \frac{2\pi \cdot 500 \cdot 10^6 \cdot 80 \cdot 10^{-4} \cdot 10^{-9} \cdot 10^8}{36\pi} = 22{,}2 \cdot 10^3\ А;$$

- для частоты $f_4 = 1\,ГГц = 10^9$ Гц

$$\left(I_{mсм}\right)_4 = \frac{2\pi \cdot 10^9 \cdot 80 \cdot 10^{-4} \cdot 10^{-9} \cdot 10^8}{36\pi} = 44{,}4 \cdot 10^3\ А.$$

1.11. В последовательном колебательном контуре протекает синусоидальный ток с амплитудой $I_m = 1$ А и частотой f . Определить амплитуду напряженности поля между обкладками контурного конденсатора, состоящего из двух плоских пластин площадью $S = 100$ см^2 каждая, разделенных слюдой ($\varepsilon_a = 6\varepsilon_0$) на частотах $f_1 = 1$ МГц, $f_2 = 1$ ГГц, $f_3 = 2{,}5$ ГГц и $f_4 = 3{,}6$ ГГц [4].

Р е ш е н и е. Запишем выражение для мгновенного значения напряженности электрического поля между обкладками конденсатора в виде

$$E = E_m \cos \omega t,$$

где $\omega = 2\pi f$ - круговая частота.

Плотность тока смещения определяется как

$$j_{см} = \frac{\partial D}{\partial t} = \frac{\partial(\varepsilon_a E)}{\partial t} = -\varepsilon_a \omega E_m \sin \omega t,$$

тогда ток смещения

$$I_{см} = j_{см} S = -\varepsilon_a \omega E_m S \sin \omega t.$$

В соответствии с утверждением Максвелла ток смещения, сосредоточенный главным образом внутри конденсатора, в каждый момент времени равен по абсолютной величине и противоположен по направлению току проводимости в цепи, т.е.

$$I_{пр} = -I_{см} = \varepsilon_a \omega E_m S \sin \omega t.$$

Амплитуда тока проводимости

$$I_{mпр} = I_m = \varepsilon_a \omega E_m S,$$

откуда

$$E_m = \frac{I_m}{\varepsilon_a \omega S}, \qquad (1.23)$$

а значит:

- на частоте f_1 = 1 МГц = 10^6 Гц

$$(E_m)_1 = \frac{36\pi}{6 \cdot 10^{-9} \cdot 2\pi \cdot 10^6 \cdot 10^{-2}} = 3 \cdot 10^5 \text{ В/м} = 300 \text{ КВ/м};$$

- на частоте f_2 = 1 ГГц = 10^9 Гц

$$(E_m)_2 = \frac{36\pi}{6 \cdot 10^{-9} \cdot 2\pi \cdot 10^9 \cdot 10^{-2}} = 300 \text{ В/м};$$

- на частоте f_3 = 2,5 ГГц = $2{,}5 \cdot 10^9$ Гц

$$(E_m)_3 = \frac{36\pi}{6 \cdot 10^{-9} \cdot 2\pi \cdot 2{,}5 \cdot 10^9 \cdot 10^{-2}} = 120 \text{ В/м};$$

- на частоте f_4 = 3,6 ГГц = $3{,}6 \cdot 10^9$ Гц

$$(E_m)_4 = \frac{36\pi}{6 \cdot 10^{-9} \cdot 2\pi \cdot 3{,}6 \cdot 10^9 \cdot 10^{-2}} = 83{,}3 \text{ В/м}.$$

1.12. Через индуктивность последовательного колебательного контура, настроенного в резонанс, проходит синусоидальный ток с амплитудой I_m = 0,5 А и частотами f_1 = 10 МГц и f_2 = 180 МГц. Определить амплитуды напряженности поля между обкладками конденсатора с воздушным заполнением, состоящего из семи плоских пластин (N = 7) площадью S_1 = 50 см^2 каждая [4].

Р е ш е н и е. Используем алгоритм предыдущей задачи

$$E = E_m \cos\omega t \;\Rightarrow\; j_{см} = \frac{\partial D}{\partial t} = \frac{\partial(\varepsilon_a E)}{\partial t} = \frac{\partial(\varepsilon_0 E)}{\partial t} = -\varepsilon_0 \omega E_m \sin\omega t \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\; I_{см} = j_{см} S = -\varepsilon_0 \omega E_m S \sin\omega t \;\Rightarrow\; I_{пр} = -I_{см} = \varepsilon_0 \omega E_m \sin\omega t \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\; I_{m\,пр} = I_m = \varepsilon_0 \omega E_m \;\Rightarrow\; E_m = \frac{I_m}{\varepsilon_0 \omega S}.$$

Первое отличие от предыдущей задачи в приведенной цепочке выкладок заключалось в том, что обкладки конденсатора разделяет не слюда, а воздух и $\varepsilon_a = \varepsilon_0$. Второе отличие состоит в том, что в выражении (1.22) для амплитуды напряженности электрического поля площадь пластин S определяется как

$$S = (N-1)S_1 = 6S_1.$$

Тогда

$$E_m = \frac{I_m}{6\varepsilon_0 \omega S_1},$$

откуда

на частоте f_1 = 10 МГц = 10^7 Гц

$$(E_m)_1 = \frac{0{,}5 \cdot 36\pi}{6 \cdot 10^{-9} \cdot 2\pi \cdot 10^7 \cdot 5 \cdot 10^{-3}} = 3 \cdot 10^4 \text{ В/м} = 30 \text{ КВ/м},$$

на частоте f_2 = 180 МГц = $18 \cdot 10^7$ Гц

$$(E_m)_2 = \frac{0{,}5 \cdot 36\pi}{6 \cdot 10^{-9} \cdot 2\pi \cdot 18 \cdot 10^7 \cdot 5 \cdot 10^{-3}} = 1{,}67 \text{ КВ/м}.$$

1.13. В изолированной колебательной системе нет сторонних источников ($P^{ст} = 0$), а мощность потерь $P_п$ пропорциональна запасу энергии W. Найти закон изменения энергии во времени [2].

Р е ш е н и е. По условию задачи

$$P_п = \alpha W,$$

где α - неопределенный пока коэффициент пропорциональности.

По определению мощность в системе – это не что иное, как скорость изменения энергии, сосредоточенной внутри нее, т.е.

$$P = -\frac{dW}{dt},$$

где знак минус выбран из тех соображений, что при положительном **P** ($P > P^{ст}$, преобладают потери) энергия должна убывать $(dW/dt < 0)$.

Тогда запишем

$$\frac{dW}{dt} = -\alpha W$$

или

$$\frac{dW}{W} = -\alpha dt.$$

После интегрирования последнего выражения

$$\ln W + C = -\alpha t,$$

где постоянную интегрирования выберем из соображений удобства как

$$C = -\ln W_0.$$

Тогда

$$\ln W - \ln W_0 = \ln \frac{W}{W_0} = -\alpha t,$$

откуда

$$W = W_0 e^{-\alpha t},$$

где W_0 – энергия системы в начале отсчета времени (t = 0).

Таким образом, энергия убывает экспоненциально с коэффициентом затухания

$$\alpha = P_п / W.$$

1.14. Через индуктивность последовательного колебательного контура, настроенного в резонанс, проходит синусоидальный ток с амплитудой I_m = 0,5 А и частотой f = 10 МГц. Определить среднее значение энергии электрического поля в конденсаторе с воздушным заполнением, состоящем из семи плоских пластин (N = 7) площадью S_1 = 50 см^2 каждая, если расстояние между его соседними пластинами d = 3 мм = $3 \cdot 10^{-3}$ м [4].

Р е ш е н и е. Воспользуемся значением для амплитуды напряженности электрического поля $E_m = 3 \cdot 10^4$ В/м, полученным в предыдущей задаче.

Электромагнитное поле, как и любой другой вид материи, обладает энергией. В произвольном объеме V электромагнитного поля сосредоточен запас энергии, ***мгновенное*** значение которой

$$W = \int_V \left(\frac{\vec{E}\vec{D}}{2} + \frac{\vec{H}\vec{B}}{2} \right) dv = \int_V \left(\frac{\varepsilon_a E^2}{2} + \frac{\mu_a H^2}{2} \right) dv. \qquad (1.24)$$

Интегральное выражение (1.24) распадается на сумму двух слагаемых, одно из них зависит только от электрического поля, а другое – от магнитного. Поэтому различают электрическую энергию W_E и магнитную W_H электромагнитного поля, ***мгновенные*** значения которых

$$W_E = \int_V \frac{\varepsilon_a E^2}{2} dv \quad и \quad W_H = \int_V \frac{\mu_a H^2}{2} dv. \qquad (1.25)$$

Подынтегральные выражения в (1.25) рассматривают как плотности электрической и магнитной энергий с ***мгновенными*** значениями

$$w_E = \frac{\varepsilon_a E^2}{2} \quad \text{и} \quad w_H = \frac{\mu_a H^2}{2}. \qquad (1.26)$$

Для определения ***средних*** мощностей в выражения (1.24) – (1.26) нужно подставить значения

$$E = \frac{\sqrt{2}}{2} E_m, \quad H = \frac{\sqrt{2}}{2} H_m. \qquad (1.27)$$

Тогда ***средние*** значения плотностей мощности

$$w_{E\,ср} = \frac{\varepsilon_a E_m^2}{4}, \quad w_{H\,ср} = \frac{\mu_a H_m^2}{4}. \qquad (1.28)$$

Таким образом, в единице объема диэлектрика конденсатора заключена энергия

$$w_{E\,ср} = \frac{\varepsilon_0 E_m^2}{4} = \frac{10^{-9}(3\cdot 10^4)^2}{36\pi\cdot 4} = 0{,}002 \text{ Дж/м}^3.$$

Поскольку объем изоляции конденсатора составляет

$$V = S(N-1)d = 50\cdot 10^{-4}\cdot 6\cdot 3\cdot 10^{-3} = 9\cdot 10^{-5} \text{ м}^3,$$

то среднее значение энергии электрического поля

$$W_E = \frac{\varepsilon_0 E_m^2}{4} V = w_{E\,ср} V = 0{,}002\cdot 9\cdot 10^{-5} = 18\cdot 10^{-8} \text{ Дж}.$$

1.15. Плоская монохроматическая линейно поляризованная волна распространяется в безграничном пространстве с параметрами $\varepsilon_a = 4\varepsilon_0$, $\mu_a = \mu_0$, $\sigma = 0$. Амплитуда напряженности электрического поля E_m = 50 мВ/м, круговая частота $\omega = 10^8$ рад/с. Определить параметры волнового процесса, направление вектора напряженности электрического поля $\vec{E}$, а также величину и направление векторов напряженности магнитного поля $\vec{H}$, вектора Пойнтинга $\vec{\Pi}$ и объемной плотности тока смещения [3].

Р е ш е н и е. Найти параметры волнового процесса:

- скорость распространения электромагнитной волны в вакууме

$$c = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}} = \frac{1}{\sqrt{\dfrac{10^{-9}\cdot 4\pi\cdot 10^{-7}}{36\pi}}} = \sqrt{\frac{36\pi}{10^{-16}\cdot 4\pi}} = 3\cdot 10^8 \text{ м/с};$$

- фазовая постоянная

$$\beta = \omega\sqrt{\varepsilon_a\mu_a} = \omega\sqrt{4\varepsilon_0\mu_0} = 2\omega\sqrt{\varepsilon_0\mu_0} = \frac{2\omega}{c} = \frac{2\cdot 10^8}{3\cdot 10^8} = \frac{2}{3} \text{ рад/м};$$

- волновое сопротивление вакуума

$$W_0 = \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}} = \sqrt{\frac{4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 36\pi}{10^{-9}}} = 120\pi \text{ Ом} \approx 377 \text{ Ом};$$

- волновое сопротивление данной среды

$$W = \sqrt{\frac{\mu_a}{\varepsilon_a}} = \sqrt{\frac{\mu_0}{4\varepsilon_0}} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}} = \frac{W_0}{2} = 60\pi \text{ Ом};$$

- фазовая скорость

$$v_ф = \frac{\omega}{\beta} = \frac{10^8 \cdot 3}{2} = 1{,}5 \cdot 10^8 \text{ м/с};$$

- длина волны

$$\lambda = \frac{2\pi}{\beta} = \frac{2\pi \cdot 3}{2} = 9{,}42 \text{ м}.$$

Для нахождения векторов поля введем декартову систему координат и направим вектор $\vec{E}$ параллельно оси x. Тогда орт $\vec{x}^o$ определяет направление вектора $\vec{E}$. Будем считать, что волна распространяется вдоль оси z. Тогда орт $\vec{z}^o$ устанавливает направление вектора Пойнтинга. Поскольку волна плоская и векторы $\vec{E}$ и $\vec{H}$ взаимно перпендикулярны и лежат в одной плоскости (синфазны), то вектор $\vec{H}$ направлен вдоль оси y, а направление этого вектора определяется ортом $\vec{y}^o$.

Запишем выражение для вектора $\vec{E}$ в комплексной форме

$$\vec{E} = \vec{x}^o E_m e^{i(\omega(-\beta z)} =$$

$$= \vec{x}^o\, 5 \cdot 10^{-2} \exp\left[i\left(10^8\, t - \frac{2}{3} z\right)\right] \text{ В/м}. \qquad (1.29)$$

Мгновенное значение вектора $\vec{E}$ выражается вещественной частью (1.29)

$$\vec{E} = \vec{x}^o E_m \cos(\omega t - \beta z) =$$

$$= \vec{x}^o\, 5 \cdot 10^{-2} \cos\left(10^8\, t - \frac{2}{3} z\right) \text{ В/м}. \qquad (1.30)$$

Амплитуду вектора $\vec{H}$ найдем из соотношения

$$H_m = \frac{E_m}{W} = \frac{50 \cdot 10^{-3}}{60\pi} = 2{,}65 \cdot 10^{-4} \text{ А/м}$$

тогда вектор $\vec{H}$ в комплексной форме запишем как

$$\vec{H} = \vec{y}^o\, 2{,}65 \cdot 10^{-4} \exp\left[i\left(10^8\, t - \frac{2}{3} z\right)\right] \text{ А/м}, \qquad (1.31)$$

а его мгновенное значение

$$\vec{H} = \vec{y}^{o}\, 2{,}65 \cdot 10^{-4} \cos\left(10^{8} t - \frac{2}{3} z\right) \text{ А / м.} \qquad (1.32)$$

Запишем вектор Пойнтинга в комплексной форме в соответствии с (1.29) и (1.31):

$$\vec{\Pi} = \left[\vec{E}\vec{H}\right] = \vec{z}^{o}\left\{5 \cdot 10^{-2} \exp\left[i\left(10^{8} t - \frac{2}{3} z\right)\right]\right\}\left\{2{,}65 \cdot 10^{-4} \exp\left[i\left(10^{8} t - \frac{2}{3} z\right)\right]\right\} \times$$

$$\times \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = \vec{z}^{o}\, 13{,}25 \cdot 10^{-6} \exp\left[2i\left(10^{8} t - \frac{2}{3} z\right)\right] \text{ Вт/м}^{2}; \qquad (1.33)$$

его мгновенное значение с учетом (1.30) и (1.32)

$$\vec{\Pi} = \left[\vec{E}\vec{H}\right] = \vec{z}^{o}\left\{5 \cdot 10^{-2} \cos\left(10^{8} t - \frac{2}{3} z\right)\right\}\left\{2{,}65 \cdot 10^{-4} \cos\left(10^{8} t - \frac{2}{3} z\right)\right\} \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) =$$

$$= \vec{z}^{o} 13{,}25 \cdot 10^{-6} \cos^{2}\left(10^{8} t - \frac{2}{3}\right) =$$

$$= \vec{z}^{o}\, 6{,}625 \cdot 10^{-6}\left\{1 + \cos\left[2\left(10^{8} t - \frac{2}{3} z\right)\right]\right\} \text{ Вт / м}^{2},$$

или как вещественная часть (1.33)

$$\vec{\Pi} = \vec{z}^{o} 13{,}25 \cdot 10^{-6} \cos\left[2\left(10^{8} t - \frac{2}{3} z\right)\right] \text{Вт / м}^{2},$$

а среднее значение с учетом (1.29) и (1.31)

$$\vec{\Pi}_{ср} = \frac{1}{2} \mathrm{Re}\left[\vec{E}\vec{H}^{*}\right] = \vec{z}^{o}\, \frac{1}{2}\left\{5 \cdot 10^{-2} \exp\left[i\left(10^{8} t - \frac{2}{3} z\right)\right] \times\right.$$

$$\left. \times 2{,}65 \cdot 10^{-4} \exp\left[-i\left(10^{8} t - \frac{2}{3}\right) z\right] \sin\left(\frac{\pi}{2}\right)\right\} = \vec{z}^{o}\, 6{,}625 \cdot 10^{-6} \text{ Вт / м}^{2}.$$

Определим вектор объемной плотности токов смещения $\vec{j}_{см}$:

- в комплексной форме

$$\vec{j}_{см} = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} = i\omega\varepsilon\varepsilon_{0}\vec{E} = i\vec{x}^{o}\, \frac{10^{8} \cdot 4 \cdot 10^{-9} \cdot 5 \cdot 10^{-2}}{36\pi} \exp\left[i\left(10^{8} t - \frac{2}{3} z\right)\right] =$$

$$= i\vec{x}^{o}\, 176{,}8 \cdot 10^{-6} \exp\left[i\left(10^{8} t - \frac{2}{3} z\right)\right] \text{ А / м,}$$

- мгновенное значение

$$\vec{j}_{см} = \mathrm{Re}\, \vec{j}_{см} = \vec{x}^{o}\, 176{,}8 \cdot 10^{-6} \cos\left(10^{8} t - \frac{2}{3} z\right) \text{ А / м}^{2}.$$

1.16. Плоская волна ТЕМ распространяется в однородном диэлектрике с параметрами $\varepsilon_a = \varepsilon_0$, $\mu_a = \mu_0$, $\sigma = 0$. Амплитуда напряженности электрического поля $E_m = 10\,\text{мВ/м}$, а частота волны f = 300 МГц. Составить уравнения напряженностей электрического и магнитного полей в комплексной форме и их мгновенных значений [4].

Р е ш е н и е. Определим параметры волнового процесса:

- фазовая постоянная

$$\beta = \omega\sqrt{\varepsilon_a \mu_a} = \omega\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0} = 2\pi\frac{f}{c} = \frac{2\pi}{\lambda} = 2\pi\frac{3\cdot 10^8}{3\cdot 10^8} = k = 2\pi \text{ рад/м};$$

- волновое сопротивление

$$W = \sqrt{\frac{\mu_a}{\varepsilon_a}} = \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}} = 120\pi = W_0 \text{ Ом};$$

- круговая частота

$$\omega = 2\pi f = 2\pi\cdot 3\cdot 10^8 = 6\pi\cdot 10^8 \text{ рад/с}.$$

Волна ТЕМ поляризована линейно, поскольку содержит только один вектор электрического поля $\vec{E}$ с неизменной ориентацией. Направим этот вектор вдоль оси **x** декартовой системы координат. Тогда орт $\vec{x}^{\,o}$ будет определять направление вектора $\vec{E}$. Вектор магнитного поля волны ТЕМ синфазен с вектором $\vec{E}$ и перпендикулярен ему, поэтому он направлен вдоль орта $\vec{y}^{\,o}$ оси y.

Тогда уравнения напряженности электрического поля имеют такой вид:

- в комплексной форме

$$\vec{E} = \vec{x}^{\,o} E_m e^{i(\omega t - kz)} = \vec{x}^{\,o} 10^{-2} \exp\left[i\left(6\pi\cdot 10^8 t - 2\pi z\right)\right] =$$
$$= \vec{x}^{\,o} 10^{-2} \exp\left[i2\pi\left(3\cdot 10^8 t - z\right)\right] \text{ В/м},$$

- мгновенное значение

$$\vec{E} = \vec{x}^{\,o} 10^{-2} \cos\left[2\pi\left(3\cdot 10^8 - z\right)\right] \text{ В/м}.$$

Амплитуды напряженностей электромагнитного поля для волны ТЕМ связаны между собой соотношением

$$\frac{E_m}{H_m} = W \quad \Rightarrow \quad H_m = \frac{E_m}{W} = \frac{E_m}{W_0},$$

откуда

$$H_m = \frac{10^{-2}}{120\pi} = 2{,}65\cdot 10^{-5} \text{ А/м}.$$

Уравнения напряженности магнитного поля запишем так:

- в комплексной форме

$$\vec{H} = \vec{y}^{\,o} 2{,}65\cdot 10^{-5} \exp\left[i2\pi\left(3\cdot 10^8 t - z\right)\right] \text{ А/м},$$

- мгновенное значение

$$\vec{H} = \vec{y}^{o} 2{,}65 \cdot 10^{-5} \cos \exp[2\pi(3 \cdot 10^{8} t - z)] \text{ А/м.}$$

1.17. Написать уравнения в комплексной форме для мгновенных значений электрического и магнитного полей плоской волны ТЕМ, распространяющейся в неограниченной среде с параметрами $\varepsilon_a = 3\varepsilon_0$, $\mu_a = \mu_0$ и $\sigma = 0$. Амплитуда напряженности магнитного поля $H_m = 10^{-6}$ А/м, а частота колебаний $f_1 = 200$ МГц, $f_2 = 2$ ГГц.

Р е ш е н и е. Вычислим параметры волнового процесса:

- круговая частота для $f_1 = 200$ МГц $= 2 \cdot 10^8$ Гц

$$\omega_1 = 2\pi f_1 = 2\pi \cdot 2 \cdot 10^8 = 12{,}57 \cdot 10^8 \text{ рад/с;}$$

- круговая частота для $f_2 = 2$ ГГц $= 2 \cdot 10^9$ Гц

$$\omega_2 = 2\pi f_2 = 2\pi \cdot 2 \cdot 10^9 = 125{,}7 \cdot 10^8 \text{ рад/с;}$$

- фазовый коэффициент для частоты $f_1 = 200$ МГц $= 2 \cdot 10^8$ Гц

$$\beta_1 = \frac{\omega_1}{v_ф} = \omega_1 \sqrt{\varepsilon_a \mu_a} = \omega_1 \sqrt{3\varepsilon_0 \mu_0} = \frac{\omega_1 \sqrt{3}}{c} = \frac{12{,}57 \cdot 10^8 \cdot 1{,}73}{3 \cdot 10^8} = 7{,}25 \text{ рад/м;}$$

- фазовый коэффициент для частоты $f_2 = 2$ ГГц $= 2 \cdot 10^9$ Гц

$$\beta_2 = \frac{2\pi f_2 \sqrt{3}}{c} = \frac{\omega_2 \sqrt{3}}{c} = \frac{125{,}7 \cdot 10^8 \cdot 1{,}73}{3 \cdot 10^8} = 72{,}5 \text{ рад/м;}$$

- волновое сопротивление

$$W = \sqrt{\frac{\mu_a}{\varepsilon_a}} = \sqrt{\frac{\mu_0}{3\varepsilon_0}} = \frac{1}{1{,}73} W_0 = \frac{377}{1{,}73} = 218 \text{ Ом.}$$

Векторы $\vec{E}$ и $\vec{H}$ волны ТЕМ синфазны, взаимно перпендикулярны и лежат в плоскости, перпендикулярной направлению распространения волны (вектору Пойнтинга). Если выбрать прямоугольную систему координат с осями x, y и z и вектор $\vec{H}$ направить вдоль оси **y**, то орт $\vec{y}^{o}$ будет определять направление вектора $\vec{H}$, а орт $\vec{x}^{o}$ - направление вектора $\vec{E}$.

Тогда уравнения напряженности магнитного поля запишем так:

- в комплексной форме для частоты f_1

$$\vec{H}_1 = \vec{y}^{o} H_m e^{i(\omega_1 t - \beta_1 z)} = \vec{y}^{o} 10^{-6} \exp[i(12{,}57 \cdot 10^8 t - 7{,}25z)] \text{ А/м;}$$

- мгновенное значение для частоты f_1

$$\vec{H}_1 = \vec{y}^{o} 10^{-6} \cos(12{,}57 \cdot 10^8 t - 7{,}25z) \text{ А/м;}$$

- в комплексной форме для частоты f_2

$$\vec{H}_2 = \vec{y}^{o} H_m e^{i(\omega_2 t - \beta_2 z)} = \vec{y}^{o} \exp[i(125{,}7 \cdot 10^8 t - 72{,}5z)] \text{ А/м;}$$

- мгновенное значение для частоты f_2

$$\vec{H}_2 = \vec{y}^{\,o} 10^{-6} \cos\left(125{,}7 \cdot 10^8 t - 72{,}5z\right) \text{А/м}.$$

1.18. Электромагнитная волна распространяется в вакууме в направлении оси **z** [3]. Определить:

- разность фаз между двумя точками с координатами $z_1 = 5$ см и $z_2 = 5{,}7$ см для волны с частотой $f_1 = 10$ ГГц.
- разность фаз между двумя точками с координатами $z_1 = 5{,}2$ см и $z_2 = 5{,}8$ см для волны с частотой $f_2 = 1{,}8$ ГГц.

Р е ш е н и е. Фазовая скорость в диэлектрической среде определяется как

$$v_ф = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_a \mu_a}}$$

и для вакуума $\left(\varepsilon_a = \varepsilon_0 = \dfrac{10^{-9}}{36\pi}\ \text{Ф/м},\ \mu_a = \mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}\ \text{Гн/м}\right)$ равна скорости света

$$v_ф = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu}} = \frac{1}{\sqrt{\dfrac{10^{-9} \cdot 4\pi \cdot 10^{-7}}{36\pi}}} = 3 \cdot 10^8\ \text{м/с}.$$

1. Фазовую постоянную получаем из выражения

$$\beta = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{2\pi f}{c} = k, \qquad (1.33)$$

откуда для частоты $f = f_1 = 10$ ГГц $= 10^{10}$ Гц находим

$$k = \frac{2\pi \cdot 10^{10}}{3 \cdot 10^8} = \frac{200\pi}{3}\ \text{рад/м}.$$

Фазу волны на расстоянии **z** вычисляем по формуле

$$\psi = kz, \qquad (1.34)$$

тогда для точки $z_1 = 5$ см $= 5 \cdot 10^{-2}$ м

$$\psi_1 = kz_1 = \frac{2\pi z_1}{\lambda} = \frac{200\pi \cdot 5 \cdot 10^{-2}}{3} = \frac{10\pi}{3}\ \text{рад},$$

а для точки $z_2 = 5{,}7$ см $= 5{,}7 \cdot 10^{-2}$ м

$$\psi_2 = kz_2 = \frac{2\pi z_2}{\lambda} = \frac{200\pi \cdot 5{,}7 \cdot 10^{-2}}{3} = \frac{11{,}4\pi}{3}\ \text{рад}.$$

Следовательно, разность фаз

$$\Delta\psi = \psi_2 - \psi_1 = \frac{11{,}4\pi}{3} - \frac{10\pi}{3} = \frac{1{,}4\pi}{3} \approx 0{,}46667\pi\ \text{рад} =$$

$$= 0{,}46667 \cdot 3{,}14 \cdot 57{,}3^o = 84^o.$$

2. Фазовая постоянная (волновое число) согласно (1.33) для частоты $f = f_2 = 1{,}8\ \text{ГГц} = 1{,}8 \cdot 10^9\ \text{Гц}$

$$k = \frac{2\pi f_2}{c} = \frac{2\pi \cdot 1{,}8 \cdot 10^9}{3 \cdot 10^8} = 36\pi\ \text{рад/м}.$$

Тогда фазу волны на расстоянии $z_1 = 5{,}2\ \text{см} = 5{,}2 \cdot 10^{-2}$ м найдем по формуле (1.34)

$$\psi_1 = kz_1 = 36\pi \cdot 5{,}2 \cdot 10^{-2} = 1{,}872\pi\ \text{рад},$$

а на расстоянии $z_2 = 5{,}8\ \text{см} = 5{,}8 \cdot 10^{-2}$ м

$$\psi_2 = kz_2 = 36\pi \cdot 5{,}8 \cdot 10^{-2} = 2{,}088\pi\ \text{рад}.$$

Следовательно, разность фаз между этими точками составляет

$$\Delta\psi = \psi_2 - \psi_1 = 2{,}088\pi - 1{,}872\pi = 0{,}216\pi\ \text{рад} = 0{,}216 \cdot 3{,}14 \cdot 57{,}3^\circ = 38{,}9^\circ.$$

Эти задачи можно решить иначе: найти разницу расстояний, проходимых волной (разность хода),

$$\Delta z = z_2 - z_1, \tag{1.35}$$

а разность фаз определить как

$$\Delta\psi = k\Delta z. \tag{1.36}$$

Тогда в первом случае с помощью (1.35) находим

$$\Delta z = 5{,}7 - 5{,}0 = 0{,}7\ \text{см} = 0{,}7 \cdot 10^{-2}\ \text{м},$$

а по формуле (1.36) определяем разность фаз (фазовый сдвиг)

$$\Delta\psi = \frac{200\pi}{3} \cdot 0{,}7 \cdot 10^{-2} = \frac{1{,}4\pi}{3} = 1{,}466\ \text{рад} = 1{,}466 \cdot 57{,}3^\circ = 84^\circ.$$

Во втором случае для разности хода

$$\Delta z = z_2 - z_1 = 5{,}8 - 5{,}2 = 0{,}6\ \text{см} = 0{,}6 \cdot 10^{-2}\ \text{м},$$

а для фазового сдвига

$$\Delta\psi = 36\pi \cdot 0{,}6 \cdot 10^{-2} = 0{,}6786\ \text{рад} = 0{,}6786 \cdot 57{,}3^\circ = 38{,}9^\circ.$$

1.19. Определить действующее значение напряженности магнитного поля H и плотность потока мощности волны ТЕМ, имеющей в среде с параметрами $\varepsilon = 4,\ \mu = 1,\ \sigma = 0$ амплитуду напряженности электрического поля E_m = 100 мкВ/м [4].

Р е ш е н и е. Найдем волновое сопротивление среды

$$W = \sqrt{\frac{\mu_a}{\varepsilon_a}} = \sqrt{\frac{\mu_0}{4\varepsilon_0}} = \frac{W_0}{2} = 60\pi = 188{,}5\ \text{Ом}.$$

Поскольку волновое сопротивление определяется как отношение амплитуд напряженностей электрического и магнитного полей в волне ТЕМ

$$W = E_m / H_m,$$

то для амплитуды напряженности магнитного поля

$$H_m = \frac{E_m}{W} = \frac{100}{188{,}5} = 0{,}53 \text{ мкА/м}.$$

Действующие значения напряженностей поля E и H связаны с их амплитудными значениями соотношениями

$$E = \frac{\sqrt{2}}{2} E_m, \quad H = \frac{\sqrt{2}}{2} H_m,$$

откуда находим

$$E = \frac{100\sqrt{2}}{2} = 70{,}5 \text{ мкВ/м},$$

$$H = \frac{0{,}53\sqrt{2}}{2} = 0{,}375 \text{ мкА/м}.$$

Действующее значение плотности потока мощности волны ТЕМ запишем так:

$$\Pi = EH = 70{,}5 \cdot 10^{-6} \cdot 0{,}375 \cdot 10^{-6} = 26{,}4 \cdot 10^{-12} \text{ Вт/м}^2 =$$

$$= 0{,}264 \cdot 10^{-10} \text{ Вт/м}^2.$$

1.20. Волна ТЕМ в диэлектрике с параметрами $\varepsilon = 9$, $\mu = 1$, $\sigma = 0$ имеет действующее значение плотности потока мощности П = 2 мкВт/м^2. Определить действующие и амплитудные значения напряженностей электрического и магнитного полей волны [4].

Р е ш е н и е. Найдем волновое сопротивление среды

$$W = \sqrt{\frac{\mu_a}{\varepsilon_a}} = \sqrt{\frac{\mu_0}{9\varepsilon_0}} = \frac{W_0}{3} = 40\pi = 125{,}7 \text{ Ом}.$$

Для волны ТЕМ вектор Пойнтинга – величина вещественная и

$$\Pi = EH = \frac{E^2}{W},$$

откуда действующее значение напряженности электрического поля

$$E = \sqrt{\Pi W} = \sqrt{2 \cdot 10^{-6} \cdot 125{,}7} = 15{,}9 \cdot 10^{-3} \text{ В/м} = 15{,}9 \text{ мВ/м}.$$

Амплитудное значение напряженности электрического поля

$$E_m = E\sqrt{2} = 15{,}9 \cdot 1{,}41 = 22{,}4 \text{ мВ/м}.$$

Действующее значение напряженности магнитного поля получаем, используя выражение для волнового сопротивления волны ТЕМ

$$W = \frac{E}{H},$$

откуда

$$H = \frac{E}{W} = \frac{15{,}9 \cdot 10^{-3}}{125{,}7} = 0{,}126 \cdot 10^{-3} \text{ А/м} = 126 \text{ мкА/м}.$$

Тогда амплитудное значение напряженности магнитного поля

$$H_m = H\sqrt{2} = 126 \cdot 1{,}41 = 177{,}7 \text{ мкА/м}.$$

1.21. Действующее значение напряженности магнитного поля H = 20 мкА/м, параметры среды $\varepsilon = 2,\ \mu = 1,\ \sigma = 0.$ Определить амплитуды напряженностей магнитного и электрического полей H_m и E_m, а также плотность потока мощности П [4].

Р е ш е н и е. Найдем волновое сопротивление среды

$$W = \sqrt{\frac{\mu_a}{\varepsilon_a}} = \sqrt{\frac{\mu_0}{2\varepsilon_0}} = \frac{W_0}{\sqrt{2}} = \frac{120\pi}{\sqrt{2}} = \frac{377}{1{,}41} = 267 \text{ Ом}.$$

По заданному действующему значению магнитного поля определим его амплитудное значение

$$H_m = H\sqrt{2} = 20 \cdot 1{,}41 = 28{,}2 \text{ мкА/м},$$

вычислим амплитуду напряженности электрического поля

$$E_m = H_m W = 28{,}2 \cdot 267 = 7529 \text{ мкВ/м} = 7{,}529 \text{ мВ/м}.$$

Действующее значение напряженности электрического поля

$$E = E_m \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{E_m}{\sqrt{2}} = \frac{7{,}529}{1{,}41} = 5{,}34 \text{ мВ/м} = 5{,}34 \cdot 10^{-3} \text{ В/м}.$$

Тогда плотность потока мощности получим из выражения

$$\Pi = \frac{E^2}{W} = \frac{5{,}34^2 \cdot 10^{-6}}{267} = 0{,}107 \text{ мкВт/м}^2 = 10{,}7 \cdot 10^{-8} \text{ Вт/м}^2.$$

1.22. Плоская гармоническая волна ТЕМ распространяется по направлению оси z и при $z = 0$ переходит из одного диэлектрика в другой. Ось **y** параллельна направлению вектора $\vec{E}$ ($\vec{E} = \vec{j}E_y$). Параметры среды:

для $-\infty \le z \le 0:\ \varepsilon_1 = 1;\ \mu_1 = 1;\ \sigma_1 = 0;$

для $0 \le z \le \infty:\ \varepsilon_2 = 4;\ \mu_2 = 1;\ \sigma_2 = 0.$

Частота волны $f = 3$ ГГц, амплитуда вектора напряженности электрического поля при $z = 0$ $E_m = 1$ мВ/м.

Найти величину векторов напряженности электрического и магнитного полей [1].

Р е ш е н и е. Вычислим параметры волнового процесса:

- фазовая постоянная в среде с ε_1, μ_1

$$\beta_1 = \omega\sqrt{\varepsilon_1\varepsilon_0\mu_1\mu_0} = 2\pi f\sqrt{\varepsilon_0\mu_0} = 2\pi\frac{f}{c} = 2\pi\frac{3 \cdot 10^9}{3 \cdot 10^8} = 20\pi \text{ м}^{-1};$$

- волновое сопротивление в среде с $\varepsilon_1,\ \mu_1$

$$W_1 = \sqrt{\frac{\mu_1\mu_0}{\varepsilon_1\varepsilon_0}} = \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}} = 377 \text{ Ом};$$

- фазовая постоянная в среде с ε_2, μ_2

$$\beta_2 = \omega\sqrt{\varepsilon_2\varepsilon_0\mu_2\mu_0} = 2\pi f\sqrt{4\varepsilon_0\mu_0} = 4\pi\frac{f}{c} = 40\pi \text{ м}^{-1};$$

- волновое сопротивление в среде с ε_2, μ_2

$$W_2 = \sqrt{\frac{\mu_2\mu_0}{\varepsilon_2\varepsilon_0}} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}} = \frac{W_0}{2} \approx 188 \text{ Ом};$$

- круговая частота

$$\omega = 2\pi f = 2\pi\cdot 3\cdot 10^9 = 6\pi\cdot 10^9 \text{ рад/с}.$$

В области $0 \le z \le \infty$ отраженных волн не будет, так как она неограниченна в направлении распространения. Комплексная амплитуда напряженности электрического поля в этой области

$$E_{2m} = |E_{2m}|e^{i(\omega t-\beta_2 z)}.$$

По условию $|E_m| = |E_{2m}| = 1 \text{ мВ/м} = 10^{-3} \text{ В/м}$, поэтому

$$E_{2m} = 10^{-3}e^{i(6\pi\cdot 10^9 t-40\pi z)} \text{ В/м}.$$

Мгновенное значение вектора напряженности электрического поля

$$\vec{E}_2 = \vec{j}10^{-3}\cos\left(6\pi\cdot 10^9 t - 40\pi z\right) \text{ В/м}.$$

Вектор напряженности магнитного поля

$$\vec{H}_2 = \vec{E}_2 / W_2,$$

следовательно,

$$\vec{H}_2 = \vec{i}H_x = \vec{i}\frac{E_{2m}}{W_2} = \vec{i}5{,}32\cdot 10^{-6}\cos\left(6\pi\cdot 10^9 t - 40\pi z\right) \text{ А/м}.$$

В области $-\infty \le z \le 0$ существуют падающие и отраженные от поверхности раздела двух сред волны, поэтому комплексные амплитуды векторов напряженности электрического и магнитного полей запишем так (множитель $e^{i\omega t}$ временно опускаем):

$$E_{1m} = C_1e^{-i\beta_1 z} + C_2e^{i\beta_1 z},$$

$$H_{1m} = \frac{C_1}{W_1}e^{-i\beta_1 z} - \frac{C_2}{W_1}e^{i\beta_1 z}.$$

Для определения постоянных C_1 и C_2 используем условия непрерывности при z = 0:

$$E_{1m} = E_{2m} \;\Rightarrow\; C_1 + C_2 = E_{2m} = E_m,$$

$$H_{1m} = H_{2m} \;\Rightarrow\; C_1 - C_2 = \frac{W_1}{W_2} E_m,$$

откуда

$$|C_1| = \left| E_m \frac{W_2 + W_1}{2W_2} \right| = 10^{-3} \frac{188 + 377}{2 \cdot 188} = 1{,}5 \cdot 10^{-3} \text{ В/м},$$

$$|C_2| = \left| E_m \frac{W_2 - W_1}{2W_2} \right| = \left| 10^{-3} \frac{188 - 377}{2 \cdot 188} \right| = 0{,}5 \cdot 10^{-3} \; В/м.$$

Комплексные амплитуды напряженностей электрического и магнитного полей равны:

$$E_{m1} = 1{,}5 \cdot 10^{-3} e^{-i20\pi z} + 0{,}5 \cdot 10^{-3} e^{i20\pi z} \text{ В/м},$$

$$H_{m1} = 3{,}98 \cdot 10^{-6} e^{-i20\pi z} - 1{,}3 \cdot 10^{-6} e^{i20\pi z} \text{ А/м}.$$

Снова введя множитель $e^{i\omega t}$, получаем выражения для мгновенных значений векторов $\vec{E}$ и $\vec{H}$ в первой области:

$$\vec{E}_1 = \vec{j}[1{,}5 \cdot 10^{-3} \cos(6\pi \cdot 10^9 t - 20\pi z) + 0{,}5 \cdot 10^{-3} \cos(6\pi \cdot 10^9 t + 20\pi z)],$$

$$\vec{H}_1 = \vec{i}[3{,}98 \cdot 10^{-6} \cos(6\pi \cdot 10^9 t - 20\pi z) - 1{,}3 \cdot 10^{-6} \cos(6\pi \cdot 10^9 t + 20\pi z)].$$

1.23. На плоский медный лист ($\sigma = 5{,}8 \cdot 10^7$ См/м) большого размера нормально падает плоская однородная волна длиной $\lambda = 10$ см. Амплитуда напряженности электрического поля волны составляет E_m = 1000 В/м. Найти мощность, теряемую при нагревании 1 см^2 листа в средней его части [1].

Р е ш е н и е. Воспользуемся формулой для мощности потерь

$$P_п = \frac{1}{2\sigma t} \int_S H_m^2 ds, \tag{1.37}$$

где $\sigma -$ удельная проводимость металла, $t -$ глубина проникновения поля в металл

$$t = \sqrt{\frac{2}{\omega \mu_a \sigma}}. \tag{1.38}$$

Чтобы применить выражение (1.37), необходимо знать амплитуду магнитного поля на поверхности листа. При определении ее будем считать лист идеально проводящим. При этом, как известно, в направлении нормали к листу устанавливается стоячая волна с удвоенной амплитудой магнитного поля около его поверхности и выполняется соотношение

$$H_m = \frac{2E_m}{W_0} \;\Rightarrow\; \frac{2 \cdot 10^3}{120\pi} = \frac{1}{6\pi} \cdot 10^2 \text{ А/м}.$$

Тогда из (1.37)

$$P_п = \frac{H_m^2 \Delta s}{2\sigma t},$$

где $\Delta s = 1\ см^2 = 10^{-4}\ м^2$.

Так как

$$2\sigma t = 2\sigma\sqrt{\frac{2}{\omega\mu_a\sigma}} = 2\sqrt{\frac{2\sigma}{\omega\mu_0}} = 2\sqrt{\frac{2\sigma}{2\pi f\mu_0}} = 2\sqrt{\frac{\sigma\lambda}{\pi c\mu_0}},$$

то

$$P_п = H_m^2 \Delta s \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi c\mu_0}{\sigma\lambda}} = \frac{10^4}{36\pi^2}10^{-4}\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi\cdot 3\cdot 10^8\cdot 4\pi\cdot 10^{-7}}{5{,}8\cdot 10^7\cdot 0{,}1}} \approx 2\cdot 10^{-5}\ Вт.$$

Задачи для самостоятельного решения

1.1. Дано электромагнитное поле с неизменным направлением вектора $\vec{E}$. Показать, что векторы $\vec{E}$ и $\vec{H}$ взаимно перпендикулярны.

1.2. Определить величину вектора электрической индукции $\vec{D}$ на расстоянии r = 0,9 м от точечного заряда q = 10^{-9} К. Найти напряженность поля в вакууме, полиэтилене ($\varepsilon = 2{,}5$) и воде ($\varepsilon = 81$).

1.3. В некоторый момент тело, характеризуемое диэлектрической проницаемостью $\varepsilon = 2{,}5\varepsilon_0$ и удельной проводимостью $\sigma = 10^{-14}$ См/м, несет электрический заряд. Определить промежуток времени, в течение которого заряд любой внутренней области уменьшится вдвое. Куда "исчезнет" заряд?

1.4. При какой частоте отношение амплитуд токов смещения и проводимости в меди ($\varepsilon = 10,\ \sigma = 5{,}65\cdot 10^7$ См/м) будет таким же, как в сухой почве ($\varepsilon = 5,\ \sigma = 10^{-3}$ См/м) при частоте f = 1 КГц?

1.5. Определить величину тока проводимости и тока смещения, протекающих через площадку $S = 1\ см^2$, расположенную перпендикулярно силовым линиям монохроматического электрического поля, если его напряженность имеет амплитуду E_m = 0,25 В/м, а частота f = 500 МГц. Задачу решить для сред: а) медь - $\sigma = 5{,}7\cdot 10^6$ См/м, $\varepsilon = 10$; б) морская вода - $\sigma = 4$ См/м, $\varepsilon = 80$; в) сухая трава - $\sigma = 10^{-3}$ См/м, $\varepsilon = 4$; г) фарфор - $\sigma = 10^{-13}$ См/м, $\varepsilon = 6$.

1.6. Для условий задачи 1.5 определить частоты, при которых амплитуды плотностей токов смещения и проводимости будут равны.

1.7. Волна ТЕМ распространяется в безграничном пространстве с параметрами $\varepsilon = 6{,}25,\ \mu = 1,\ \sigma = 0$. Амплитуда напряженности магнитного

поля H_m = 50 А/м. Определить параметры волнового процесса, а также величину и направление векторов напряженности электрического поля $\vec{E}$, Пойнтинга $\vec{\Pi}$ и объемной плотности тока смещения $\vec{j}_{см}$.

1.8. Поле в точке наблюдения есть сумма двух гармонических полей, имеющих начальные фазы напряженности электрического поля $\varphi_1 = \pi/18$ и $\varphi_2 = \pi/3$ и одинаковые амплитуды $E_{m1} = E_{m2} = 10$ В/м. Определить амплитуду и фазу вектора $\vec{E}$ суммарного поля и его мгновенное значение для момента времени $t = 1{,}3 \cdot 10^4$ с, если частота обоих полей f = 10 КГц, а векторы $\vec{E}_1$ и $\vec{E}_2$ параллельны.

1.9. Найти частоту волны, распространяющейся в кварце с $\varepsilon = 3{,}8$, если на расстоянии $\Delta\ell = 25$ см измеренный фазовый сдвиг составляет $\Delta\psi = 75^o$.

1.10. Определить амплитуду напряженности магнитного поля волны с частотой $f = 6$ КГц, если мгновенное значение напряженности магнитного поля, измеренное на расстоянии $\ell = 25$ км от начала координат для момента времени $t = 0{,}1$ мс, составляет H = 50 мкА/м. Диэлектрик – воздух. Фаза колебания $\psi_0 = 10^o$ при $\ell = 0$.

1.11. Площадка с $S = 500$ см^2 расположена в воздухе перпендикулярно направлению распространения плоской волны. Напряженность электрического поля на площадке имеет амплитуду $E_m = 10$ мкВ/м. Определить среднюю активную мощность, переносимую плоской волной через площадку, и амплитуду напряженности магнитного поля.

1.12. Средняя мощность, переносимая плоской волной через площадку S = 0,2 м^2, расположенную в среде с $\varepsilon = 4$, составляет $P_{ср}$ = 10 мВт. Определить амплитуду напряженности электрического и магнитного полей, если направление распространения составляет угол $\theta = 30^o$ относительно нормали к площадке.

1.13. Написать (в комплексной форме, а также мгновенные значения) уравнения электрического и магнитного полей волны ТЕМ, распространяющейся в неограниченной среде с параметрами $\varepsilon = 6{,}25\varepsilon_0$, $\mu = \mu_0$, $\sigma = 0$. Амплитуда напряженности электрического поля $E_m = 10^{-4}$ В, а частота – $f = 1{,}8$ ГГц.

1.14. Определить фазовые постоянные β_1 и β_2 волны ТЕМ при распространении ее в средах с параметрами $\varepsilon_1 = 2$, $\mu_1 = 1$, $\sigma_1 = 0$ и $\varepsilon_2 = 4$, $\mu_2 = 1$, $\sigma_2 = 0$. Длина волны в первой среде $\lambda_1 = 5$ м.

1.15. Определить фазовую скорость $v_ф$, фазовый коэффициент β, длину волны λ и волновое сопротивление $W_д$ для волны ТЕМ, распространяющейся в среде с параметрами $\varepsilon_а = 2\varepsilon_0$, $\mu_а = \mu_0$ и $\sigma = 0$ при частоте f = 100 МГц.

1.16. Пространство разделено на три области: 1) $-\infty \le z \le -d$; 2) $-d \le z \le 0$; 3) $0 \le z \le \infty$. Плоская гармоническая волна ТЕМ распространяется в направлении оси z.

Волна линейно поляризована $\vec{E} = \vec{j}E_y$. Диэлектрическая проницаемость среды в первой области - ε_1, во второй - ε_2, в третьей - ε_3. Магнитные проницаемости всех трех областей одинаковы: $\mu_1 = \mu_2 = \mu_3 = \mu_0$. Удельная проводимость $\sigma = 0$.

Найти минимальное значение d и соотношение между $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ и ε_3, при котором в первой области не будет отраженной волны.

1.17. Вывести из уравнений Максвелла волновые уравнения для однородной непроводящей среды, считая плотность зарядов $\rho = 0$. Параметры среды: $\varepsilon_а = \varepsilon\varepsilon_0$, $\mu_а = \mu\mu_0$, $\sigma = 0$.

1.18. На лист из серебра ($\sigma = 6{,}3 \cdot 10^7$ См/м) большого размера нормально падает волна ТЕМ с частотой f = 2 ГГц. Амплитуда напряженности электрического поля волны составляет 2,5 КВ/м. Найти мощность, теряемую при нагревании $\Delta s = 1\,см^2$ листа в его средней части.

2. ЛИНИИ ПЕРЕДАЧИ СВЧ

2.1. Кабель РК-75 длиной 14,5 м с изоляцией из полиэтилена ($\varepsilon = 2{,}3$) замкнут накоротко и питается генератором с частотой 50 МГц. Определить входное сопротивление кабеля [4].

Р е ш е н и е. Найти длину волны в воздухе, соответствующую частоте f = 50 МГц = $5 \cdot 10^7$ Гц:

$$\lambda = \frac{c}{f} = \frac{3 \cdot 10^8}{5 \cdot 10^7} = \frac{30}{5} = 6 \text{ м}.$$

Длину волны в кабеле $\lambda_к$ определяют с учетом того, что скорость распространения волн в нем меньше, чем в воздухе в $\sqrt{\varepsilon}$ раз, т.е.

$$\lambda_к = \frac{\lambda}{\sqrt{\varepsilon}} = \frac{\lambda}{\sqrt{2{,}3}} = \frac{6}{1{,}52} \approx 4\,м,$$

а фазовая постоянная (волновое число) для кабеля

$$\beta_к = \frac{2\pi}{\lambda_к} = \frac{\pi}{2}\ \text{рад/м} = 90\,\text{град/м}.$$

Входное сопротивление $Z_{вх}$ линии передачи с волновым сопротивлением W, нагруженной на сопротивление $Z_н$, определяется выражением

$$Z_{вх} = W\frac{Z_н\cos(\beta_к x) + iW\sin(\beta_к x)}{W\cos(\beta_к x) + iZ_н\sin(\beta_к x)}, \qquad (2.1)$$

а поскольку линия закорочена на конце, то $Z_н = 0$ и

$$Z_{вх} = iW\mathrm{tg}(\beta_к x).$$

Тогда для линии длиной $x = 14{,}5\,м$ или, что то же самое, для линии длиной $x = 14{,}5 - m\lambda_к/2$ (m = 0, 1, 2,…), т.е. для

$$x = 14{,}5 - 7\cdot\lambda_к/2 = 14{,}5 - 7\cdot 2 = 0{,}5\,м$$

(так как входное сопротивление через участки линии, кратные целому числу полуволн, повторяется),

$$Z_{вх} = i75\mathrm{tg}\left(\frac{\pi}{2}\cdot\frac{1}{2}\right) = +i75\,Ом.$$

Следовательно, это сопротивление индуктивного характера.

2.2. Генератор, работающий на частоте f = 1 МГц, питает линию, не имеющую потерь. Длина линии $\ell = 60\,м$, волновое сопротивление W = 100 Ом. Рассчитать сопротивление нагрузки так, чтобы входное сопротивление линии было равно нулю ($Z_{вх} = 0$) [4].

Р е ш е н и е. Найдем рабочую длину волны генератора

$$\lambda = \frac{c}{f} = \frac{3\cdot 10^8}{10^6} = 300\,м,$$

а поскольку характеристика линии отсутствует, будем считать, что и в линии волна распространяется с такой длиной.

Разделим числитель и знаменатель формулы (2.1) на $\cos(\beta_к x)$. Получим

$$Z_{вх} = W\frac{Z_н + iW\mathrm{tg}(\beta_к x)}{W + iZ_н\mathrm{tg}(\beta_к x)} = 0.$$

Так как $W \neq 0$, то $Z_н + iW\mathrm{tg}(\beta_к x) = 0$, откуда

$$Z_н = -iW\mathrm{tg}(\beta_к x) = -iW\mathrm{tg}\left(\frac{2\pi x}{\lambda}\right)$$

или

$$Z_н = -i100\mathrm{tg}\left(\frac{2\pi\cdot 60}{300}\right) = -i100\mathrm{tg}\left(\frac{360^o}{5}\right) = -i100\mathrm{tg}72^o = -i100\cdot 3{,}08 =$$

$$= -i308\,Ом.$$

Следовательно, характер сопротивления нагрузки должен быть емкостным.

2.3. Определить входное сопротивление короткозамкнутой линии без потерь, если ее длина $\ell = 24$ м, а рабочая длина волны $\lambda = 62$ м. Линия выполнена из коаксиального кабеля с полиэтиленовой изоляцией ($\varepsilon = 2{,}3$) с $D/d = 6{,}2$. Вычислить значение емкости или индуктивности, соответствующее найденному входному сопротивлению [4].

Р е ш е н и е. Найдем фазовую постоянную

$$\beta_к = \frac{2\pi}{\lambda_к} = \frac{2\pi\sqrt{\varepsilon}}{\lambda} = \frac{2\pi\sqrt{2{,}3}}{62} = 0{,}1537\,\text{рад/м}$$

и набег по фазе при прохождении волной длины кабеля ℓ

$$\beta_к \ell = 0{,}1537 \cdot 24 = 3{,}69 \text{ рад.}$$

Входное сопротивление, определяемое по формуле

$$Z_{вх} = R_{вх} + iX_{вх} = W\frac{Z_н + iW\text{tg}(\beta_к \ell)}{W + iZ_н\text{tg}(\beta_к \ell)}, \qquad (2.2)$$

для короткозамкнутой линии ($Z_н = 0$)

$$iX_{вх} = iW\text{tg}(\beta_к \ell) = iW\text{tg}3{,}69.$$

Волновое сопротивление коаксиального кабеля находим из выражения

$$W = \frac{138}{\sqrt{\varepsilon}}\lg\frac{D}{d} = \frac{138}{\sqrt{2{,}3}}\lg 6{,}2 = 72\,\text{Ом}, \qquad (2.3)$$

тогда

$$X_{вх} = 72 \cdot \text{tg}3{,}69 = 72 \cdot 0{,}61 = 43{,}92\,\text{Ом}.$$

Входное сопротивление имеет индуктивный характер. Индуктивность, эквивалентная данному входному сопротивлению, определяется из условия

$$X_{вх} = \omega L_{экв}, \qquad (2.4)$$

откуда

$$L_{экв} = \frac{X_{вх}}{\omega} = \frac{X_{вх}}{2\pi f} = \frac{X_{вх}\lambda_\varepsilon}{2\pi c} = \frac{X_{вх}\lambda}{2\pi c\sqrt{\varepsilon}} = \frac{43{,}92 \cdot 62 \cdot 10^6}{2\pi \cdot 3 \cdot 10^8\sqrt{2{,}3}} = 0{,}3175 \text{ мкГн}.$$

2.4. Определить входное сопротивление разомкнутой линии без потерь, которая имеет волновое сопротивление W = 200 Ом. Длина линии $\ell = 9{,}7$ м, а длина волны генератора, питающего линию, $\lambda = 36$ м. Вычислить также величину емкости или индуктивности, соответствующую найденному входному сопротивлению [4].

Р е ш е н и е. Фазовая постоянная (волновое число)

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{360^\circ}{36} = 10\,\text{град/м},$$

а набег по фазе на длине линии

$$k\ell = 10 \cdot 9{,}7 = 97^{\circ}.$$

Входное сопротивление, вычисляемое по формуле (2.2), для разомкнутой на конце линии ($Z_н = \infty$) имеет вид

$$Z_{вх} = R_{вх} + iX_{вх} = -iW\mathrm{ctg}(k\ell),$$

откуда

$$X_{вх} = -W\mathrm{ctg}(k\ell) = -200 \cdot \mathrm{ctg}97^{\circ} = -\frac{200}{\mathrm{tg}97^{\circ}} = -\frac{200}{-8{,}1} = 24{,}7\,\text{Ом}.$$

Видно, что входное сопротивление имеет индуктивный характер. Эквивалентная индуктивность, соответствующая этому сопротивлению, определяется из условия

$$X_{вх} = \omega L_{экв},$$

откуда

$$L_{экв} = \frac{X_{вх}}{\omega} = \frac{X_{вх}}{2\pi f} = \frac{X_{вх}\lambda}{2\pi c} = \frac{24{,}7 \cdot 36}{6{,}28 \cdot 3 \cdot 10^{8}} = 47{,}2 \cdot 10^{-8}\ \text{Гн} = 0{,}472\,\text{мкГн}.$$

2.5. Линия без потерь имеет волновое сопротивление W = 100 Ом и нагружена на чисто индуктивное сопротивление, равное $X_н$ = 50 Ом. Найти входное сопротивление линии на частоте f = 3 МГц при длине линии $\ell = 5$ м [4].

Р е ш е н и е. Найдем рабочую длину волны линии

$$\lambda = \frac{c}{f} = \frac{3 \cdot 10^{8}}{3 \cdot 10^{6}} = 100\,\text{м}.$$

Поскольку сопротивление нагрузки

$$Z_н = iX_н = i50\ \text{Ом},$$

то из формулы (2.2)

$$Z_{вх} = W\frac{iX_н + iW\mathrm{tg}(k\ell)}{W + i[iX_н\mathrm{tg}(k\ell)]} = iW\frac{X_н + W\mathrm{tg}(k\ell)}{W - X_н\mathrm{tg}(k\ell)} =$$

$$= i100\frac{50 + 100\mathrm{tg}\left(\dfrac{360^{\circ} \cdot 5}{100}\right)}{100 - 50\mathrm{tg}\left(\dfrac{360^{\circ} \cdot 5}{100}\right)} = i100\frac{50 + 100\mathrm{tg}(18^{\circ})}{100 - 50\mathrm{tg}(18^{\circ})} \approx i98\ \text{Ом}.$$

Таким образом, входное сопротивление линии также имеет индуктивное сопротивление.

2.6. Если размер **a** поперечного сечения прямоугольного волновода больше, чем $\lambda/2$, то такой волновод можно представить в виде двухпроводной линии АВ, к которой примыкают с обеих сторон короткозамкнутые перемычки длиной $\ell = \lambda/4$ (рис. 2.1). Будут ли эти

перемычки препятствовать передаче волн напряжения и тока в продольном направлении (по линии АВ)?

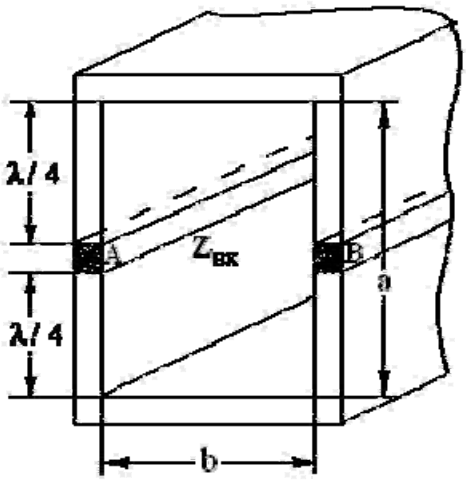


Рис. 2.1

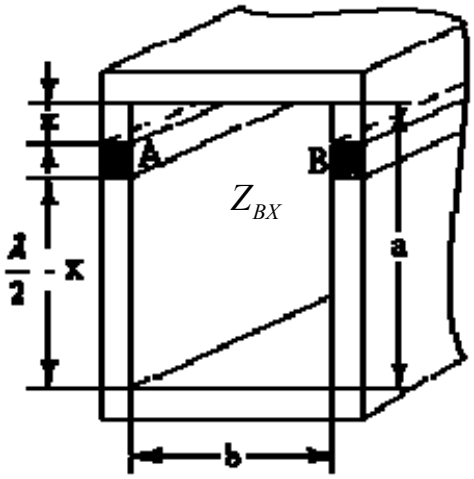


Рис. 2.2

Р е ш е н и е. Воспользуемся формулой (2.2), которая в случае короткозамкнутых перемычек (шлейфов) ($Z_н = 0$) примет вид

$$Z_{вх} = iWtg(k\ell).$$

Так как длина перемычек $\lambda/4$, то

$$k\ell = \frac{2\pi\ell}{\lambda} = \frac{\pi}{2} \;\Rightarrow\; tg(k\ell) = tg(\pi/2) = \infty \;\Rightarrow\; Z_{вх} = \infty.$$

Таким образом, входное сопротивление шлейфов равно бесконечности, а их шунтирующее действие отсутствует (как при параллельном подключении вольтметра с бесконечно большим внутренним сопротивлением для измерения падения напряжения на активном сопротивлении). Следовательно, они не будут препятствовать передаче волн по АВ.

Это свойство широко используется на практике, например, при создании ***"металлических изоляторов***", служащих для закрепления одного проводника по отношению к другому без помощи диэлектрических изоляторов.

2.7. Пусть размер **а** прямоугольного волновода больше, чем $\lambda/2$, но линия АВ находится на произвольном расстоянии x от верхней короткозамыкающей перемычки (рис. 2.2). Будут ли в этом случае перемычки препятствовать передаче волн по линии АВ?

Р е ш е н и е. В формуле (2.2) для верхней перемычки положим $\ell = x$, а для нижней - $\ell = \lambda/2 - x$. Поскольку они обе короткозамкнутые,то:

- для верхней перемычки

$$Z'_{вх} = iWtg(kx) = iWtg\left(\frac{2\pi}{\lambda}x\right),$$

- для нижней перемычки

$$Z''_{вх} = iWtg\left[\frac{2\pi}{\lambda}\left(\frac{\lambda}{2} - x\right)\right].$$

Поскольку эти перемычки включены параллельно, то их общее сопротивление

$$Z_{вх} = \frac{Z'_{вх} Z''_{вх}}{Z'_{вх} + Z''_{вх}},$$

а так как

$$Z''_{вх} = iWtg\left[\frac{2\pi}{\lambda}\left(\frac{\lambda}{2} - x\right)\right] = -iWtg\left(\frac{2\pi}{\lambda}x\right),$$

то

$$Z_{вх} = \frac{iWtg\left(\frac{2\pi}{\lambda}x\right)\left[-iWtg\left(\frac{2\pi}{\lambda}x\right)\right]}{iWtg\left(\frac{2\pi}{\lambda}x\right) + \left[-iWtg\left(\frac{2\pi}{\lambda}x\right)\right]} = \infty.$$

Таким образом, как и в предыдущем случае, передаче волн вдоль АВ перемычки препятствовать не будут.

2.8. Определить волновое сопротивление четвертьволнового трансфор-

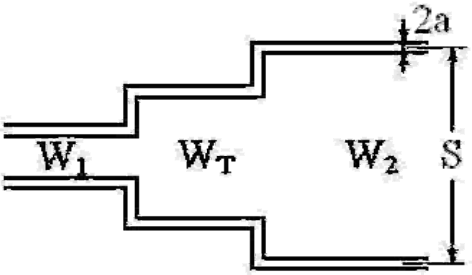


Рис. 2.3

матора $W_т$, согласующего отрезки двухпроводных линий с волновыми сопротивлениями W_1 = 400 Ом и W_2 = 600 Ом (рис. 2.3), а также найти отношение расстояния между проводами к радиусу проводов s/a линии трансформатора [4].

Р е ш е н и е. Воспользуемся формулой (2.1), положив в ней длину линии $x = \lambda/4$. Поскольку $\beta_к x = kx = 2\pi x/\lambda = \pi/2$, получим

$$W^2 = Z_{вх} Z_н \quad \Rightarrow \quad W = \sqrt{Z_{вх} Z_н}. \qquad (2.5)$$

Выражение (2.5) справедливо для согласования любых двух сопротивлений, в частности волновых сопротивлений. Четвертьволновый отрезок линии, служащий для согласования двух линий с разными волновыми сопротивлениями, называется ***четвертьволновым трансформатором*** , а выражение (2.5) записывают в виде

$$W_т = \sqrt{W_1 W_2}\ . \qquad (2.6)$$

Так как волновые сопротивления линий зависят от их поперечных размеров, то для линий с неодинаковыми волновыми сопротивлениями будут различные поперечные сечения (см. рис. 2.1). Поэтому такие устройства называют ***ступенчатыми трансформаторами***.

Для согласующего участка

$$W_т = \sqrt{400 \cdot 600} = 490\,\text{Ом}.$$

Волновое сопротивление двухпроводной линии определяется как

$$W = \frac{276}{\sqrt{\varepsilon}} \lg \frac{s}{a}, \qquad (2.7)$$

где a – радиус проводов линии; s – расстояние между центрами проводов;

ε - относительная диэлектрическая проницаемость изоляции.

Для воздушной двухпроводной линии

$$W = 276 \lg \frac{s}{a}. \qquad (2.8)$$

Из выражения (2.8) следует, что

$$490 = 276 \lg \frac{s}{a} \;\Rightarrow\; \lg \frac{s}{a} = \frac{490}{276} = 1{,}775 \;\Rightarrow\; \frac{s}{a} = 10^{1{,}775} = 59{,}57.$$

Итак,

$$s / a = 59{,}57.$$

Найдем также отношение s / a для согласуемых линий:

- для линии с W = 400 Ом

$$400 = 276 \lg \frac{s}{a} \;\Rightarrow\; \lg \frac{s}{a} = \frac{400}{276} = 1{,}45 \;\Rightarrow\; \frac{s}{a} = 10^{1{,}45} = 28{,}18,$$

- для линии с W = 600 Ом

$$600 = 276 \lg \frac{s}{a} \;\Rightarrow\; \lg \frac{s}{a} = \frac{600}{276} = 2{,}17 \;\Rightarrow\; \frac{s}{a} = 10^{2{,}17} = 147{,}91.$$

Таким образом, поперечный размер линии тем больше, чем больше ее волновое сопротивление.

2.9. Определить волновое сопротивление и поперечные размеры коаксиального перехода от кабеля РК-75 к кабелю РК-50 (рис. 2.4).

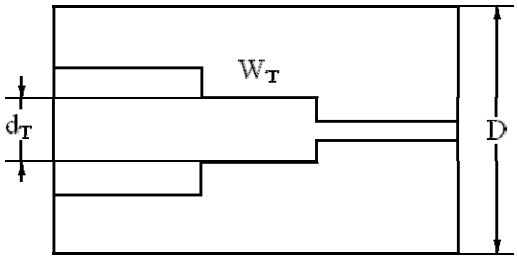


Рис. 2.4

Р е ш е н и е. В обозначениях стандартных коаксиальных кабелей: РК – коаксиальный радиочастотный, цифры 75 и 50 – волновые сопротивления.

Волновое сопротивление коаксиальной линии

$$W = \frac{138}{\sqrt{\varepsilon}} \lg \frac{D}{d}, \qquad (2.9)$$

где D – внутренний диаметр внешней оболочки кабеля (определяется по изоляции),

d – диаметр центрального проводника.

Для воздушной коаксиальной линии

$$W = 138 \lg \frac{D}{d}. \qquad (2.10)$$

С помощью формулы (2.6) находим

$$W_т = \sqrt{50 \cdot 75} = 61{,}23 \text{ Ом},$$

а из (2.10) определяем

$$61{,}24 = 138 \lg \frac{D}{d} \;\Rightarrow\; \lg \frac{D}{d} = \frac{61{,}24}{138} = 0{,}444 \;\Rightarrow\; \frac{D}{d} = 10^{0{,}444} = 2{,}78.$$

В обозначениях стандартных кабелей после волнового сопротивления через дефис следует цифра, указывающая на диаметр оболочки по оплетке. Например, из обозначения РК-50-11 видно, что D = 11 мм. Приняв этот диаметр за общий, получаем диаметр центрального провода переходника

$$d_т = \frac{D}{2{,}78} = \frac{11}{2{,}78} = 3{,}96 \text{ мм}.$$

Примечание. Исходя из максимальной мощности и минимальных потерь при заданном диаметре внешнего проводника (оболочки) в качестве компромиссного стандарта приняты воздушная коаксиальная линия с волновым сопротивлением 50 Ом и соотношением между диаметрами $D/d = 2{,}3$ и линия с W = 75 Ом и соотношением $D/d = 3{,}6$.

2.10. Рассчитать экспоненциальный фидерный трансформатор, предназначенный для согласования антенны с активным входным сопротивлением R_A = 600 Ом и фидера с волновым сопротивлением W = 300 Ом. Фидер выполнен из двух медных проводов диаметром d = 2a = 3 мм. Допустимый КСВ = 1,1 при максимальной рабочей длине волны $\lambda_{max} = 80$ м [4].

Р е ш е н и е. Волновое сопротивление экспоненциального трансформатора на расстоянии **x** от его конца

$$W_{в1} = W_{в2} e^{-bx}, \qquad (2.11)$$

где $W_{в2}$ – волновое сопротивление трансформатора на его конце;

b – параметр, который выбирают исходя из допустимого коэффициента стоячей волны КСВ в линии и максимальной длины волны диапазона λ_{max} :

$$|b| = \frac{8\pi}{\lambda_{max}} \text{КСВ}. \qquad (2.12)$$

Длина экспоненциального трансформатора

$$\ell = \frac{2{,}3}{b} \lg \frac{W_{в2}}{W_{в1}}. \qquad (2.13)$$

Определяем коэффициент b, характеризующий степень изменения параметров трансформатора, согласно формуле (2.12)

$$|b| = \frac{8\pi}{b} \text{КСВ} = \frac{8\pi}{80} 1{,}1 = 0{,}345 \ 1/\text{м}.$$

Положив $R_A = W_{в2}$, а $W = W_{в1}$, находим в соответствии с (2.13) длину трансформатора

$$\ell = \frac{2{,}3}{b} \lg \frac{W_{в2}}{W_{в1}} = \frac{2{,}3}{0{,}345} \lg \frac{600}{300} = 2 \text{м}.$$

Вычисляем волновые сопротивления $Z_в$ и расстояния между проводами s_x в различных сечениях трансформатора (x = 0, 2, 4,…, 20 м), учитывая, что крайние значения волновых сопротивлений равны 600 и 300 Ом и для воздушной линии, являющейся к тому же экспоненциальным трансформатором, справедливы равенства

$$R_A = 276 \lg \frac{s_x}{a}, \qquad (2.14)$$

$$R_A = W_{в2} e^{-bx}. \qquad (2.15)$$

Результаты расчета сводим в табл. 2.1.

Таблица 2.1

Профиль экспоненциального трансформатора

x, м	0	0,2	0,4	0,6	0,8	1,0	1,2	1,4	1,6	1,8	2,0
bx	0	0,07	0,14	0,21	0,28	0,35	0,41	0,48	0,55	0,66	0,70
e^{-bx}	1	0,93	0,87	0,81	0,76	0,71	0,66	0,62	0,58	0,52	0,50
R_A	600	560	523	488	455	425	397	370	346	310	300
$\lg \frac{s_x}{a}$	2,17	2,03	1,89	1,77	1,65	1,54	1,44	1,34	1,25	1,12	1,09
$\frac{s_x}{a}$	148	107	77,7	58,9	44,7	34,7	27,7	21,9	17,8	13,2	12,3
s_x, мм	222	161	117	87,4	67,1	52,1	41,6	32,9	26,7	19,8	18,5

Эскиз перехода показан на рис. 2.5.

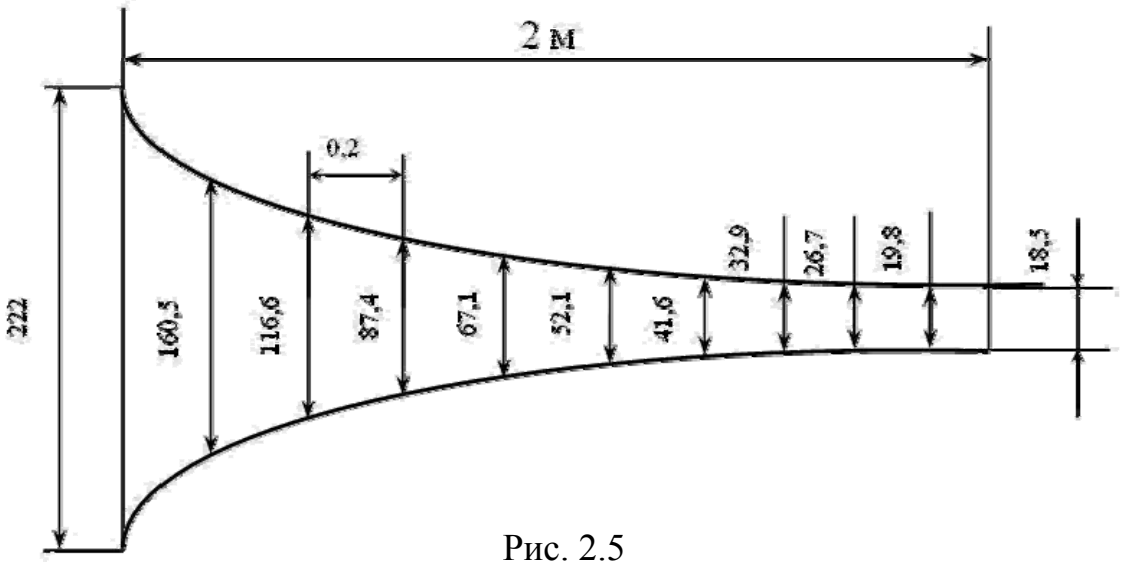


Рис. 2.5

2.11. Определить типы поперечно-магнитных волн, которые могут распространяться в плоскопараллельном волноводе на частоте f = 6 ГГц, расстояние между идеально проводящими плоскостями a = 6 см [1].

Найти основные параметры этих волн: волновое сопротивление, критическую длину волны, фазовую скорость, длину волны между пластинами.

Р е ш е н и е. Определим длину волны и фазовую постоянную в свободном пространстве:

$$\lambda = \frac{c}{f} = \frac{3 \cdot 10^8}{6 \cdot 10^9} = 5 \text{ см}, \quad \beta = k = \frac{2\pi}{\lambda} = 125{,}6 \text{ рад/м}.$$

Критическую длину волны для плоскопараллельного волновода находим по формуле

$$\lambda_{кр} = \frac{2a}{m},$$

где m – количество полуволн, которые могут уложиться между пластинами.

Отсюда следует, что условию $\lambda < \lambda_{кр}$ соответствуют характеристические числа:

а) $m = 0$ - плоская электромагнитная волна ТЕМ;

б) $m = 1$ - поперечно-магнитная волна $TM_1(E_1)$;

в) $m = 2$ - поперечно-магнитная волна $TM_2(E_2)$.

Первый тип. Плоская электромагнитная волна (ТЕМ) может распространяться как в свободном пространстве, так и между идеально проводящими плоскостями.

При этом

$$n = 0; \quad \lambda_{кр} = \infty; \quad W_{ТЕМ} = W_0 = 377 \text{ Ом}; \quad v_{гр} = v_ф; \quad \lambda_в = \lambda.$$

Если ось z прямоугольной системы координат направить в сторону распространения волны, ось y – перпендикулярно плоскостям, а ось x – параллельно им, то уравнения для электрической и магнитной составляющих поля волны ТЕМ запишем в такой форме:

$$E_z = 0;$$

$$E_y = E_0 e^{i(\omega t - \beta z)};$$

$$H_x = \frac{E_0}{W_0} e^{i(\omega t - \beta z)}.$$

Электрические силовые линии нормальны к ограничивающим поверхностям, магнитные силовые линии им параллельны. Векторы $\vec{E}$ и $\vec{H}$ – поперечные, т.е. лежат в плоскости, перпендикулярной направлению распространения волны z. Значения модулей E и H остаются неизменными в пределах этой плоскости, т.е. не зависят от координат y и x. Обе составляющие поля совпадают по фазе (рис. 2.6).

Плотность тока смещения

$$j_{см} = \varepsilon\varepsilon_0 \frac{\partial E}{\partial t} = i\omega\varepsilon\varepsilon_0 E_0 e^{i(\omega t - \beta z)} = \omega\varepsilon\varepsilon_0 E_0 e^{i\left(\omega t - \beta z + \frac{\pi}{2}\right)}.$$

Направления векторов $\vec{j}$ и $\vec{E}$ совпадают, но $j_{см}$ опережает E на четверть периода.

В направлении распространения z составляющие поля изменяются по закону бегущей волны, а на расстоянии, равном половине длины волны, их знак меняется на противоположный.

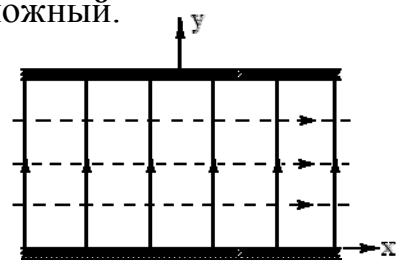


Рис. 2.6

Второй тип $(n = 1)$ – волна TM_1 (или E_1), в которой электрическое поле имеет помимо поперечной составляющей еще и составляющую в направлении распространения.

В этом случае $\lambda_{кр1} = 2a = 12\,см$, т.е. удвоенному расстоянию между поверхностями, а параметры волнового процесса равны:

$$v_{ф1} = \frac{c}{\sqrt{1 - (\lambda / 2a)^2}} = \frac{3 \cdot 10^8}{0{,}906} = 3{,}32 \cdot 10^8\ м/с;$$

$$\lambda_{в1} = \frac{\lambda}{\sqrt{1-(\lambda/2a)^2}} = \frac{5}{0{,}906} = 5{,}51\,см;$$

$$v_{гр1} = c\sqrt{1-(\lambda/2a)^2} = 3\cdot 10^8 \cdot 0{,}906 = 2{,}72\cdot 10^8\ м/с;$$

$$W_E = W_0\sqrt{1-(\lambda/2a)^2} = 377\cdot 0{,}906 = 341\,Ом.$$

Электромагнитное поле имеет продольную и поперечную составляющие E_z и E_y, а также магнитную составляющую H_x, определяемые такими выражениями:

$$E_y = E_0\frac{\lambda}{\lambda_{в1}}\cos\left(\frac{\pi y}{a}\right)e^{-i\beta_1 z};$$

$$E_z = iE_0\frac{\lambda}{\lambda_{кр1}}\sin\left(\frac{\pi y}{a}\right)e^{-i\beta_1 z};$$

$$H_x = -\frac{E_0}{W_0}\cos\left(\frac{\pi y}{a}\right)e^{-i\beta_1 z},$$

где $\beta_1 = 2\pi/\lambda_в$ – фазовая постоянная в плоскопараллельном волноводе.

На ограничивающих поверхностях ($y = 0$ или $y = a/2$) $E_z = 0$, следовательно, электрические силовые линии выходят из поверхностей по нормалям, на полпути между поверхностями ($y = a/2$)

$$\cos\left(\frac{\pi y}{a}\right)\Big|_{y=a/2} = \cos(\pi/2) = 0,$$

поэтому $E_y = 0$, т.е. остается лишь продольная составляющая E_z. Таким образом, при $y = a/2$ электрические силовые линии параллельны ограничивающим поверхностям. При перемещении от одной поверхности к другой на участке от $y = 0$ до $y = a/2$ происходит постепенное увеличение E_z по закону $\sin(\pi y/a)$ и постепенное уменьшение E_y по закону $\cos(\pi y/a)$. Электрические силовые линии все более и более отклоняются от нормалей к поверхностям. На участке от $y = a/2$ до $y = a$ происходит уменьшение E_z и увеличение E_y, электрические силовые линии приближаются к нормалям (рис. 2.7).

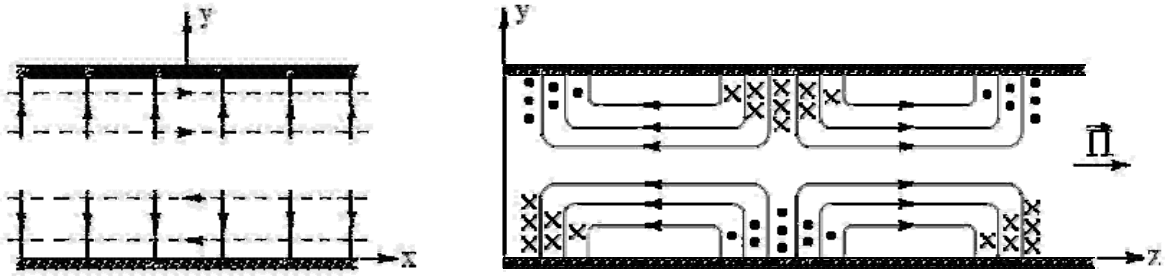


Рис. 2.7

Напряженность магнитного поля H_x будет иметь один знак при $0 < y < a/2$ и другой – при $a/2 < y < a$. При y = a/2 составляющая $H_x = 0$. Густота магнитных силовых линий будет уменьшаться по мере удаления от поверхностей к середине расстояния между ними. Составляющая H_x находится в фазе с составляющей E_y.

Третий тип (n = 2) соответствует волне TM_2 (или E_2). В этом случае

$$\lambda_{кр2} = 2a/2 = a = 6\,см;$$

$$v_{гр2} = c\sqrt{1-(\lambda/\lambda_{кр2})^2} = 3\cdot 10^8 \cdot \sqrt{1-(5/6)^2} = 1{,}66\cdot 10^8\ м/с;$$

$$v_{ф2} = \frac{c}{\sqrt{1-(\lambda/a)^2}} = \frac{3\cdot 10^8}{\sqrt{1-(5/6)^2}} = 5{,}43\cdot 10^8\ м/с;$$

$$W_E = W_0\sqrt{1-(\lambda/a)^2} = 377\cdot\sqrt{1-(5/6)^2} = 208\ Ом;$$

$$\lambda_{в2} = \frac{\lambda}{\sqrt{1-(\lambda/a)^2}} = \frac{5}{\sqrt{1-(5/6)^2}} = 9\ см.$$

Выражения для существующих составляющих поля волны $TM_1(E_1)$ имеют такой вид:

$$E_y = E_0\frac{\lambda}{\lambda_{в2}}\cos\left(\frac{2\pi y}{a}\right)e^{-i\beta_2 z};$$

$$E_z = iE_0\frac{\lambda}{\lambda_{кр2}}\sin\left(\frac{2\pi y}{a}\right)e^{-i\beta_2 z};$$

$$H_x = -\frac{E_0}{W_0}\cos\left(\frac{2\pi y}{a}\right)e^{-i\beta_2 z},$$

где β_2 – фазовая постоянная волны $TM_2(E_2)$

$$\beta_2 = \frac{2\pi}{\lambda_в} = \frac{2\pi}{\lambda}\sqrt{1-\left(\frac{\lambda}{a}\right)^2} = \frac{2\pi}{5}\sqrt{1-\left(\frac{5}{6}\right)^2} = 0{,}22\pi\,рад/м.$$

2.12. Определить мощность, передаваемую по плоскопараллельному волноводу, состоящему из двух медных полос, разделенных диэлектриком с относительными значениями проницаемостей: диэлектрической $\varepsilon = 2{,}25$ и магнитной $\mu = 1$; толщина диэлектрика a = 4 мм; ширина полос b = 15 мм; амплитуда напряженности электрического поля E_0 = 5000 В/м, частота f = 40 ГГц.

Определить потери мощности в медных полосах на 1 м длины линии.

Расчет выполнить для всех типов волн ТМ, которые могут передаваться по этой линии. Влиянием краев полос можно пренебречь. Потери мощности в диэлектрике считать равными нулю [1].

Р е ш е н и е. Найдем некоторые параметры волнового процесса:

- скорость распространения в диэлектрике

$$v = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon\varepsilon_0\mu\mu_0}} = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}}\frac{1}{\sqrt{\varepsilon\mu}} = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon}} = \frac{3\cdot 10^8}{\sqrt{2{,}25}} = 2\cdot 10^8 \text{ м/с};$$

- фазовую постоянную

$$\beta = \frac{\omega}{v} = \frac{2\pi f}{v} = \frac{2\pi\cdot 4\cdot 10^{10}}{2\cdot 10^8} = 400\pi \text{ рад/м};$$

- длину волны в диэлектрике

$$\lambda = \frac{v}{f} = \frac{2\cdot 10^8}{40\cdot 10^9} = 5 \text{ мм}.$$

По данной линии могут распространяться такие типы поперечно-магнитных волн: волна ТЕМ(TM_0) с критической длиной $\lambda_{кр} = \infty$ и волна $TM_1(E_1)$, для которой

$$\lambda_{кр} = 2a = 8 \text{ мм}.$$

Заметим, что здесь использована система координат, выбранная в предыдущей задаче. Выражения для составляющих поля волны типа TM_1 остаются такими же, как в предыдущей задаче.

В случае распространения волны ТЕМ волновое сопротивление линии

$$W_0' = \sqrt{\frac{\mu\mu_0}{\varepsilon\varepsilon_0}} = \frac{W_0}{\sqrt{\varepsilon}} = \frac{377}{\sqrt{2{,}25}} = 251 \text{ Ом},$$

тогда амплитуда напряженности магнитного поля

$$H_0 = \frac{E_0}{W_0'} = \frac{5000}{251} = 19{,}92 \text{ А/м}.$$

Диэлектрик не имеет потерь, следовательно, E_y и H_x совпадают по фазе и среднее значение продольной составляющей вектора Пойнтинга, определяемое как векторное произведение векторов $\vec{E}$ на $\vec{H}^*$, будет равно их простому произведению:

$$П_{ср} = \frac{1}{2}E_y H_x^* = \frac{1}{2}E_0 H_0 = \frac{1}{2}\cdot 5000\cdot 19{,}92 = 49800 \text{ Вт/м}^2.$$

Множителем ½ в выражении для $П_{ср}$ учитывается, что E_0 и H_0 будут подставляться в амплитудных значениях. Полученное значение $П_{ср}$ постоянно по всему сечению линии в плоскости, нормальной к направлению распространения волны.

Тогда передаваемая линией мощность

$$P = П_{ср}ab = 49800\cdot 4\cdot 10^{-3}\cdot 15\cdot 10^{-3} = 2{,}99 \text{ Вт}.$$

Амплитудное значение поверхностной плотности тока в медных полосах

$$j_{макс} = H_0 = 19{,}92 \text{ А/м};$$

действующее значение тока в полосах

$$I = \frac{\sqrt{2}}{2} j_{макс} b = \frac{\sqrt{2} \cdot 19{,}92 \cdot 15 \cdot 10^{-3}}{2} = 0{,}211 \text{ А};$$

удельное поверхностное сопротивление меди

$$R_s = \sqrt{\frac{\omega \mu_a}{2\sigma}} = \sqrt{\frac{2\pi \cdot 40 \cdot 10^9 \cdot 4\pi \cdot 10^{-7}}{2 \cdot 5{,}6 \cdot 10^7}} = 5{,}26 \cdot 10^{-2} \text{ Ом};$$

поверхностное сопротивление двух полос на 1 м длины линии

$$R = 2R_s \frac{1}{b} = \frac{2 \cdot 5{,}26 \cdot 10^{-2}}{15 \cdot 10^{-3}} = 7 \text{ Ом};$$

потери мощности в медных полосах на 1 м длины линии

$$P_1 = I^2 R = 0{,}211^2 \cdot 7 = 0{,}312 \text{ Вт}.$$

В случае распространения волны $TM_1(E_1)$ длина её между пластинами

$$\lambda_в = \frac{\lambda}{\sqrt{1 - (\lambda / 2a)^2}} = \frac{5}{\sqrt{1 - (5/8)^2}} = 6{,}4 \text{ мм},$$

а волновое сопротивление линии

$$W_E = W_0' \sqrt{1 - (\lambda / 2a)^2} = 251 \cdot \sqrt{1 - (5/8)^2} = 196 \text{ Ом}.$$

Потери в медных полосах, ограничивающих поле, будут иметь такую же величину, как и в случае волны ТЕМ.

Это можно объяснить тем, что составляющая напряженности магнитного поля, определяемая как

$$H_x = E_y / W_E,$$

имеет вид

$$H_x = \frac{E_0 (\lambda / \lambda_в)}{W_E} \cos\left(\frac{\pi y}{a}\right) e^{-i\beta_1 z},$$

откуда амплитуда напряженности магнитного поля

$$H_0 = \frac{E_0}{W_E}\left(\frac{\lambda}{\lambda_в}\right) = \frac{E_0 \sqrt{1 - (\lambda / \lambda_в)^2}}{W_0' \sqrt{1 - (\lambda / \lambda_в)^2}} = \frac{E_0}{W_0'} = 19{,}92 \text{ А/м},$$

т.е. такая же, как и для волны ТЕМ. Следовательно, такой же будет и поверхностная плотность проводимости, а значит, и потери в полосах.

Передаваемую мощность определяют так:

$$P = \int_0^b \int_0^a \Pi_{ср} dx dy = \frac{1}{2} \int_0^b \int_0^a E_y H_x^* dx dy =$$

$$= \frac{b}{2} \int_0^a E_0 \frac{\lambda}{\lambda_в} \cos\left(\frac{\pi y}{a}\right) e^{-i\beta_1 z} \frac{E_0}{W_0'} \cos\left(\frac{\pi y}{a}\right) e^{i\beta_1 z} dy =$$

$$= \frac{b}{2}\frac{E_0^2}{W_0'}\frac{\lambda}{\lambda_в}\int_0^a \cos^2\left(\frac{\pi y}{a}\right)dy = \frac{abE_0^2\lambda}{4W_0'\lambda_в}$$

и

$$P = \frac{4\cdot 10^{-3}\cdot 15\cdot 10^{-3}\cdot 5000^2\cdot 5}{4\cdot 251\cdot 6{,}4} = 1{,}17 \text{ Вт}.$$

2.13. Определить, какие типы волн могут распространяться в заполненном воздухом прямоугольном волноводе сечением $a\times b = 5\times 2{,}5$ см при частоте $f = 7{,}5$ ГГц. Найти значения критической длины волны и длины волны в волноводе в каждом случае [1].

Р е ш е н и е. Длина волны в свободном пространстве

$$\lambda = \frac{c}{f} = \frac{3\cdot 10^8}{7{,}5\cdot 10^9} = 4 \text{ см}.$$

Критическая длина волны определяется выражением

$$\lambda_{кр} = \frac{2}{\sqrt{\left(\frac{m}{a}\right)^2 + \left(\frac{n}{b}\right)^2}} = \frac{2}{\sqrt{\left(\frac{m}{5}\right)^2 + \left(\frac{n}{2{,}5}\right)^2}},$$

а длина волны в волноводе

$$\lambda_в = \frac{\lambda}{\sqrt{1-(\lambda/\lambda_{кр})^2}}.$$

Условию $\lambda < \lambda_{кр}$ удовлетворяют типы волн (табл. 2.2).

Таблица 2.2

Типы волн в прямоугольном волноводе

Возможные типы волн	Характеристические числа		Критическая длина волны, см	Длина волны в волноводе, см
	M	n		
TE_{10} (H_{10})	1	0	10	4,36
TE_{20} (H_{20})	2	0	5	6,66
TE_{01} (H_{01})	0	1	5	6,66
TE_{11}(H_{11}) и TM_{11}(E_{11})	1	1	4,47	8,95

2.14. Определить размеры поперечного сечения $\mathbf{a_c}$, $\mathbf{b_c}$ и длину четверть-волнового трансформатора ℓ_c, согласующего два отрезка прямоугольного волновода, из которых один отрезок имеет размеры a_1 = 19,05мм, b_1 = 9,53 мм, а другой – $a_2 = a_1$ = 19,05 мм, b_2 = 10,2 мм (рис. 2.8). В волноводе распространяется волна типа H_{10} с частотой f = 12 ГГц [4].

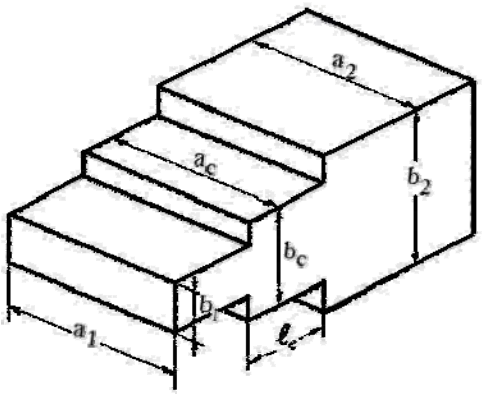


Рис. 2.8

Р е ш е н и е. Найдем длину волны в свободном пространстве

$$\lambda = \frac{c}{f} = \frac{3 \cdot 10^8}{12 \cdot 10^9} = 2{,}5\,\text{см}.$$

Волновое сопротивление волновода с волной H_{10} по мощности и напряжению определяется как

$$W_{P,U} = W = \frac{2b}{a} W_H, \qquad (2.16)$$

где W_H – удельное волновое сопротивление

$$W_H = \frac{W_0}{\sqrt{1 - \left(\frac{\lambda}{2a}\right)^2}}. \qquad (2.17)$$

Поскольку размер широкой стенки не меняется,

$$W_{H1} = W_{H2} = W_H.$$

В соответствии с (2.6) волновое сопротивление согласующей ступеньки

$$W_c = \sqrt{W_1 W_2},$$

где

$$W_1 = \frac{2b_1}{a_1} W_H, \quad W_2 = \frac{2b_2}{a_2} W_H, \quad W_C = \frac{2b_c}{a_c}.$$

Так как

$$a_1 = a_2 = a_c,$$

то

$$b_c = \sqrt{b_1 b_2} \qquad \text{или} \qquad b_c = \sqrt{9{,}53 \cdot 10{,}2} = 9{,}86 \text{ мм}.$$

Длина ступеньки

$$\ell_c = \lambda_в / 4,$$

где

$$\lambda_в = \frac{\lambda}{\sqrt{1-\left(\frac{\lambda}{2a}\right)^2}} = \frac{2,5}{\sqrt{1-\left(\frac{2,5}{2\cdot 1,905}\right)^2}} = 3,32 \text{ см.}$$

Тогда

$$\ell_c = 3,32/4 = 8,3\,\text{мм.}$$

2.15. Определить размеры поперечного сечения a_c, b_c и длину ступенчатого трансформатора ℓ_c, согласующего два отрезка

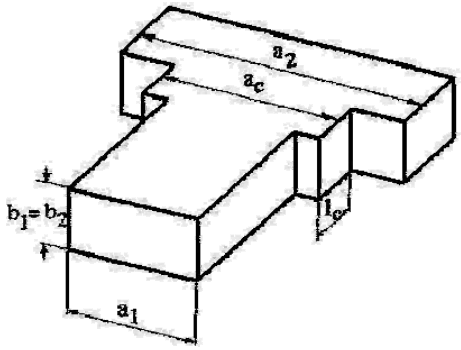


Рис. 2.9

прямоугольного волновода, один из которых имеет размеры $a_1 = 15,8$ мм, $b_1 = 7,9$ мм (МЭК-140), а другой - $a_2 = 19,05$ мм, $b_2 = b_1 = 7,9$ мм (рис. 2.9).

По первому волноводу проходит волна типа H_{10} с частотой f = 14 ГГц [4].

Р е ш е н и е. Находим сначала длину волны в свободном пространстве для первого волновода. Так как средняя частота для волновода МЭК-140 соответствует средней частоте f_1 =14 ГГц, то

$$\lambda_1 = \frac{c}{f_1} = \frac{3\cdot 10^8}{14\cdot 10^9} = 2,14\,\text{см}.$$

Длина волны в свободном пространстве для второго волновода МЭК-120

$$\lambda_2 = \frac{c}{f_2} = \frac{3\cdot 10^8}{12\cdot 10^9} = 2,5\,\text{см.}$$

Длина волны в свободном пространстве для согласующей ступеньки

$$\lambda_{ср} = \frac{\lambda_1+\lambda_2}{2} = \frac{2,14+2,5}{2} = 2,32\,\text{см.}$$

Волновые сопротивления по мощности и напряжению согласуемых волноводов определяют так:

- для первого волновода

$$W_1 = \frac{2b}{a_1}\frac{W_0}{\sqrt{1-(\lambda_1/2a_1)^2}} = \frac{2\cdot 0,79}{1,58}\frac{377}{\sqrt{1-(2,14/2\cdot 1,58)^2}} = 512,6\,\text{Ом},$$

- для второго волновода

$$W_2 = \frac{2b}{a_2}\frac{W_0}{\sqrt{1-(\lambda_2/2a_2)^2}} = \frac{2\cdot 0{,}79}{1{,}905}\frac{377}{\sqrt{1-(2{,}5/2\cdot 1{,}905)^2}} = 414{,}4\,\text{Ом}.$$

Волновое сопротивление согласующей ступеньки согласно (2.6)

$$W_c = \sqrt{W_1 W_2} = \sqrt{512{,}6\cdot 414{,}4} = 461\,\text{Ом}.$$

Тогда размер a_c ступеньки найдем из выражения

$$W_c = \frac{2b}{a_c}\frac{W_0}{\sqrt{1-(\lambda_{ср}/2a_c)^2}},$$

откуда

$$a_c\sqrt{1-\left(\frac{\lambda_{ср}}{2a_c}\right)^2} = \frac{2bW_0}{W_c} \;\Rightarrow\; a_c^2\left[1-\left(\frac{\lambda_{ср}}{2a_c}\right)^2\right] = 1{,}67 \;\Rightarrow\; a_c^2 = 1{,}67 + \frac{\lambda_{ср}^2}{4} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\; a_c^2 = 1{,}67 + \frac{2{,}32^2}{4} \;\Rightarrow\; a_c = 1{,}74\,\text{см}.$$

Длина волны в ступеньке

$$\lambda_c = \frac{\lambda_{ср}}{\sqrt{1-(\lambda_{ср}/2a_c)^2}} = \frac{2{,}32}{\sqrt{1-(2{,}32/2\cdot 1{,}74)^2}} = 3{,}1\,\text{см},$$

а длина ступеньки

$$\ell_c = \frac{\lambda_c}{4} = \frac{3{,}1}{4} = 0{,}775\,\text{см}.$$

2.16. Определить размеры поперечного сечения a_c, b_c и длину ступенчатого трансформатора ℓ_c, согласующего отрезки двух стандартных волноводов МЭК-220 с размерами $a_1 \times b_1 = 10{,}67 \times 5{,}32$ мм и МЭК-180 с размерами $a_2 \times b_2 = 12{,}96 \times 6{,}48$ мм (рис. 2.10).

По первому волноводу проходит волна типа H_{10} с частотой f_1 = 22 ГГц.

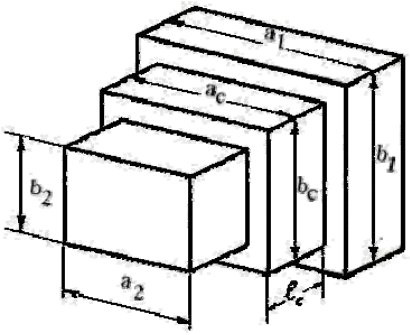


Рис. 2.10

Р е ш е н и е. Найдем сначала длины волн в свободном пространстве:

- для первого волновода

$$\lambda_1 = \frac{c}{f_1} = \frac{3 \cdot 10^8}{22 \cdot 10^9} = 1{,}36\,\text{см};$$

- для второго волновода

$$\lambda_2 = \frac{c}{f_2} = \frac{3 \cdot 10^8}{18 \cdot 10^9} = 1{,}67\,\text{см};$$

- для согласующей ступеньки

$$\lambda_{ср} = \frac{\lambda_1 + \lambda_2}{2} = \frac{1{,}36 + 1{,}67}{2} = 1{,}52\,\text{см}.$$

Волновые сопротивления по мощности и напряжению согласно (2.16) равны:

- для первого волновода

$$W_1 = \frac{2b_1}{a_1} \frac{W_0}{\sqrt{1 - (\lambda_1 / 2a_1)^2}} = \frac{2 \cdot 0{,}532}{1{,}067} \frac{377}{\sqrt{1 - (1{,}36 / 2 \cdot 1{,}067)^2}} = 487{,}6\,\text{Ом},$$

- для второго волновода

$$W_2 = \frac{2b_2}{a_2} \frac{W_0}{\sqrt{1 - (\lambda_2 / 2a_2)^2}} = \frac{2 \cdot 0{,}648}{1{,}296} \frac{377}{\sqrt{1 - (1{,}67 / 2 \cdot 1.296)^2}} = 493\,\text{Ом}.$$

Волновое сопротивление ступеньки согласно (2.6)

$$W_c = \sqrt{W_1 W_2} = \sqrt{487{,}6 \cdot 493} = 490{,}3\,\text{Ом}.$$

С другой стороны,

$$W_c = \frac{2b_c}{a_c} \frac{W_0}{\sqrt{1 - (\lambda_{ср} / 2a_c)^2}}.$$

Положив $a_c = 2b_c$, получим

$$\sqrt{1 - \left(\frac{\lambda_{ср}}{2a_c}\right)^2} = \frac{W_0}{W_c} = \frac{377}{490{,}3} = 0{,}769 \Rightarrow 1 - \left(\frac{\lambda_{ср}}{2a_c}\right)^2 = 0{,}591 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(\frac{\lambda_{ср}}{2a_c}\right)^2 = 0{,}409 \Rightarrow \frac{\lambda_{ср}}{2a_c} = 0{,}64 \Rightarrow a_c = \frac{\lambda_{ср}}{2 \cdot 0{,}64} = \frac{1{,}52}{1{,}28} = 1{,}19\,\text{см},$$

тогда размер ступеньки

$$b_c = \frac{a_c}{2} = \frac{1{,}19}{2} = 0{,}595\,\text{см}.$$

Длина волны в ступеньке

$$\lambda_c = \frac{\lambda_{ср}}{\sqrt{1 - (\lambda_{ср} / 2a_c)^2}} = \frac{1{,}52}{\sqrt{1 - (1{,}52 / 2 \cdot 1{,}19)^2}} = 1{,}977\,\text{см},$$

откуда длина ступеньки

$$\ell_c = \frac{\lambda_c}{4} = \frac{1{,}977}{4} = 0{,}49\,\text{см}.$$

2.17. Определить волновые сопротивления W_c' и W_c'' двух четверть-волновых отрезков, образующих широкополосный трансформатор для согласования коаксиальных линий с волновыми сопротивлениями $W_1 = 50$ Ом и $W_2 = 75$ Ом (рис. 2.11).

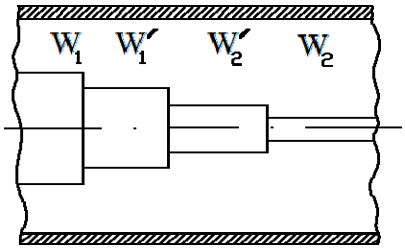


Рис. 2.11

Р е ш е н и е. Заменим условно двухступенчатый трансформатор одноступенчатым с волновым сопротивлением W_c, которое согласно (2.6) равно

$$W_c = \sqrt{W_1 W_2} = \sqrt{50 \cdot 75} = 61{,}2 \text{ Ом}.$$

Тогда волновое сопротивление первой ступеньки будем определять как сопротивление, согласующее сопротивления отрезков волноводов с W_1 и W_c, т.е.

$$W_c' = \sqrt{W_1 W_c} = \sqrt{W_1 \sqrt{W_1 W_2}}, \qquad (2.18)$$

а волновое сопротивление второй ступеньки – как сопротивление, согласующее сопротивления отрезков волноводов с W_2 и W_c, т.е.

$$W_c'' = \sqrt{W_2 W_c} = \sqrt{W_2 \sqrt{W_1 W_2}}. \qquad (2.19)$$

Окончательно получим

$$W_c' = \sqrt{50 \cdot 61{,}2} = 55{,}3 \text{ Ом},$$

$$W_c'' = \sqrt{75 \cdot 61{,}2} = 67{,}75 \text{ Ом}.$$

2.18. На рис. 2.12 показан эскиз коаксиального ступенчатого трансформатора для согласованного соединения линий с различными волновыми сопротивлениями. Рассчитать диаметры центрального проводника, если внутренний диаметр внешнего проводника D = 20 см, а волновые сопротивления различных участков трансформатора имеют такие значения: $W_1 = 150$ Ом, $W_2 = 114$ Ом, $W_3 = 66$ Ом, $W_4 = 50$ Ом. Диэлектрик – воздух [3].

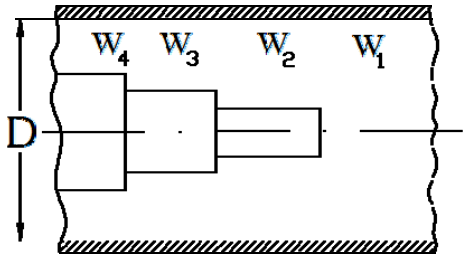


Рис. 2.12

Р е ш е н и е. Проверим сначала выполнение условия широкополосного согласования (2.18) и (2.19):

$$W_2 = \sqrt{W_1\sqrt{W_1W_4}} = \sqrt{150\sqrt{150\cdot 50}} = 114 \text{ Ом},$$

$$W_3 = \sqrt{W_2\sqrt{W_1W_4}} = \sqrt{50\sqrt{150\cdot 50}} = 66 \text{ Ом}.$$

Волновое сопротивление воздушной коаксиальной линии определяется выражением (2.10)

$$W = 138\lg\frac{D}{d},$$

откуда

$$W_1 = 138\lg\frac{D}{d_1} \Rightarrow \frac{W_1}{138} = \lg\frac{D}{d_1} \Rightarrow 10^{W_1/138} = \frac{D}{d_1} \Rightarrow d_1 = \frac{D}{10^{W_1/138}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow d_1 = \frac{20}{10^{150/138}} = \frac{20}{10^{1,087}} = \frac{20}{12,217} = 1,64 \text{ см};$$

$$W_2 = 138\lg\frac{D}{d_2} \Rightarrow \frac{W_2}{138} = \lg\frac{D}{d_2} \Rightarrow 10^{W_2/138} = \frac{D}{d_2} \Rightarrow d_2 = \frac{D}{10^{W_2/138}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow d_2 = \frac{20}{10^{114/138}} = \frac{20}{10^{0,826}} = \frac{20}{6,7} = 2,99 \text{ см};$$

$$W_3 = 138\lg\frac{D}{d_3} \Rightarrow \frac{W_3}{138} = \lg\frac{D}{d_3} \Rightarrow 10^{W_3/138} = \frac{D}{d_3} \Rightarrow d_3 = \frac{D}{10^{W_3/138}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow d_3 = \frac{20}{10^{66/138}} = \frac{20}{10^{0,468}} = \frac{20}{2,94} = 6,8 \text{ см};$$

$$W_4 = 138\lg\frac{D}{d_4} \Rightarrow \frac{W_4}{138} = \lg\frac{D}{d_4} \Rightarrow 10^{W_4/138} = \frac{D}{d_4} \Rightarrow d_4 = \frac{D}{10^{W_4/138}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow d_4 = \frac{20}{10^{50/138}} = \frac{20}{10^{0,362}} = \frac{20}{2,3} = 8,7 \text{ см}.$$

2.19. Определить размеры поперечных сечений a_{c1}, b_{c1} и a_{c2}, b_{c2}, а также длины двухступенчатого трансформатора ℓ_{c1} и ℓ_{c2}, согласующего два

отрезка прямоугольных волноводов, один из которых (МЭК-180) имеет размеры $a_1 \times b_1 = 12{,}95 \times 6{,}48$ мм, а другой - $a_2 = a_1 = 12{,}95$, $b_2 = 9{,}525$ мм (рис. 2.13).

По структуре проходит волна типа H_{10} с частотой f = 18 ГГц.

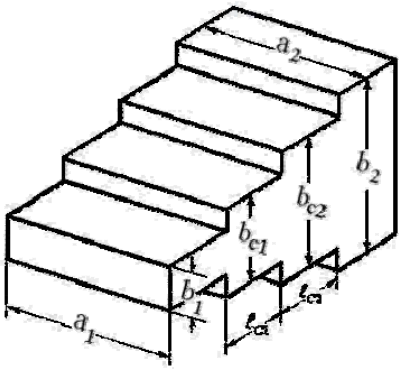


Рис. 2.13

Р е ш е н и е. Находим длину волны в свободном пространстве

$$\lambda = \frac{c}{f} = \frac{3 \cdot 10^8}{18 \cdot 10^9} = 1{,}67 \text{ см}$$

и длину волны в волноводе

$$\lambda_в = \frac{\lambda}{\sqrt{1-(\lambda / 2a_1)^2}} = \frac{1{,}67}{\sqrt{1-(1{,}67/2 \cdot 1{,}295)^2}} = 2{,}185 \text{ см.}$$

Поскольку размер, определяющий критическую длину волны H_{10}, остается неизменным

$$a_1 = a_2 = a_{c1} = a_{c2},$$

то удельное волновое сопротивление также не меняется. Изменятся только волновые сопротивления по мощности и напряжению:

$$W_1 = \frac{2b_1}{a} W_H; \quad W_2 = \frac{2b_2}{a} W_H; \quad W_{c1} = \frac{2b_{c1}}{a} W_H; \quad W_{c2} = \frac{2b_{c2}}{a} W_H.$$

Тогда из (2.18) для первой ступеньки

$$W_{c1} = \sqrt{W_1 \sqrt{W_1 W_2}} \quad \Rightarrow \quad b_{c1} = \sqrt{b \sqrt{b_1 b_2}},$$

откуда

$$b_{c1} = \sqrt{6{,}48 \sqrt{6{,}48 \cdot 9{,}525}} = 7{,}1 \text{ см.}$$

Из (2.19) для второй ступеньки

$$W_{c2} = \sqrt{W_2 \sqrt{W_1 W_2}} \quad \Rightarrow \quad b_{c2} = \sqrt{b_2 \sqrt{b_1 b_2}},$$

откуда

$$b_{c2} = \sqrt{9{,}525 \sqrt{6{,}48 \cdot 9{,}525}} = 8{,}65 \text{ см.}$$

Поскольку длина волны H_{10} от размера узкой стенки не зависит, длина обеих ступенек будет одинаковой и равной

$$\ell_{c1} = \ell_{c2} = \frac{\lambda_в}{4} = \frac{2{,}185}{4} = 0{,}55 \text{ см.}$$

2.20. Определить размеры поперечных сечений a_{c1}, b_{c1} и a_{c2}, b_{c2}, а также длины ℓ_{c1}, ℓ_{c2} двухступенчатого широкополосного трансформатора, согласующего два отрезка прямоугольного волновода, один из которых имеет размеры $a_1 = 12{,}95$ мм, $b_1 = 6{,}48$ мм (МЭК-180), а другой - $a_2 = 19{,}05$ мм, $b_2 = b_1 = 6{,}48$ мм (рис. 2.14).

По первому волноводу проходит волна типа H_{10} с частотой f = 18 ГГц.

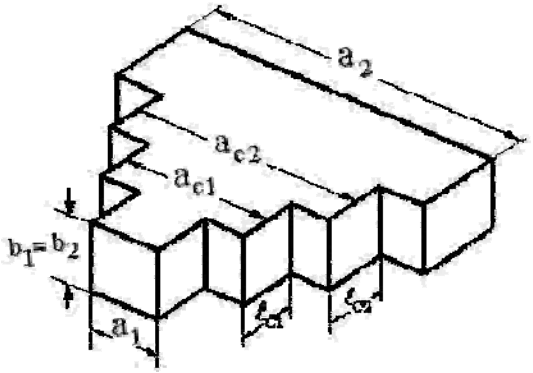


Рис. 2.14

Р е ш е н и е. Найдем длину волны в свободном пространстве для первого волновода

$$\lambda_1 = \frac{c}{f_1} = \frac{3 \cdot 10^8}{18 \cdot 10^9} = 1{,}67 \text{ см.}$$

Второй волновод имеет широкую стенку, определяющую критическую длину волны для волновода МЭК-120, для которого f_2 = 12 ГГц, а длина волны в свободном пространстве

$$\lambda_2 = \frac{c}{f_2} = \frac{3 \cdot 10^8}{12 \cdot 10^9} = 2{,}5 \text{ см.}$$

Длину волны в свободном пространстве для согласующей ступеньки, эквивалентной двум рассчитываемым, найдем как среднюю длину волны волновода МЭК-140, расположенного между волноводами МЭК-120 и МЭК-180,

$$\lambda_c = \frac{c}{f_c} = \frac{3 \cdot 10^8}{14 \cdot 10^9} = 2{,}14 \text{ см.}$$

Волновые сопротивления по мощности и напряжению в первом и во втором волноводах равны:

- в первом волноводе

$$W_1 = \frac{2b}{a_1} \frac{W_0}{\sqrt{1 - (\lambda_1 / 2a_1)^2}} = \frac{2 \cdot 0{,}648}{1{,}295} \frac{377}{\sqrt{1 - (1{,}67 / 2 \cdot 1{,}295)^2}} = 493{,}8 \text{ Ом,}$$

- во втором волноводе

$$W_2 = \frac{2b}{a_2}\frac{W_0}{\sqrt{1-(\lambda_2/2a_2)^2}} = \frac{2\cdot 0{,}648}{1{,}905}\frac{377}{\sqrt{1-(2{,}5/2\cdot 1{,}905)^2}} = 340 \text{ Ом.}$$

Волновые сопротивления рассчитываемых ступенек в соответствии с (2.18) и (2.19) определяют так:

- для 1-й ступеньки

$$W_{c1} = \sqrt{W_1\sqrt{W_1W_2}} = \sqrt{493{,}8\sqrt{493{,}8\cdot 340}} = 450 \text{ Ом;}$$

- для 2-й ступеньки

$$W_{c2} = \sqrt{W_2\sqrt{W_1W_2}} = \sqrt{340\sqrt{493{,}8\cdot 340}} = 373 \text{ Ом.}$$

Из выражения

$$W_{c1} = \frac{2b}{a_{c1}}\frac{W_0}{\sqrt{1-(\lambda_{c1}/2a_{c1})^2}} = 450 \text{ Ом}$$

находим

$$a_{c1}\sqrt{1-\left(\frac{\lambda_c}{2a_{c1}}\right)^2} = \frac{2bW_0}{W_{c1}} = \frac{2\cdot 0{,}648\cdot 377}{450} = 1{,}086 \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\; a_{c1}^2\left[1-\left(\frac{\lambda_c}{2a_{c1}}\right)^2\right] = 1{,}18 \;\Rightarrow\; a_{c1}^2 = 1{,}18 + \frac{\lambda_c^2}{4} = 1{,}18 + \frac{2{,}14^2}{4} = 2{,}32 \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\; a_{c1} = 1{,}52 \text{ см.}$$

Из формулы

$$W_{c2} = \frac{2b}{a_{c2}}\frac{W_0}{\sqrt{1-(\lambda_c/2a_{c2})^2}} = 373 \text{ Ом}$$

получим

$$a_{c2}\sqrt{1-\left(\frac{\lambda_c}{2a_{c2}}\right)^2} = \frac{2bW_0}{W_{c2}} = \frac{2\cdot 0{,}648\cdot 377}{373} = 1{,}31 \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow a_{c2}^2\left[1-\left(\frac{\lambda_c}{2a_{c2}}\right)^2\right] = 1{,}716 \;\Rightarrow\; a_{c2}^2 = 1{,}716 + \frac{\lambda_c^2}{4} = 2{,}86 = 2{,}86 \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\; a_{c2} = 1{,}69 \text{ см.}$$

Определяем длины волн в ступеньках:

- в 1-й ступеньке

$$\lambda_{c1} = \frac{\lambda_c}{\sqrt{1-(\lambda_c/2a_{c1})^2}} = \frac{2{,}14}{\sqrt{1-(2{,}14/2\cdot 1{,}52)^2}} = 3{,}01 \text{ см,}$$

- во 2-й ступеньке

$$\lambda_{c2} = \frac{\lambda_c}{\sqrt{1-(\lambda_c / 2a_{c2})^2}} = \frac{2{,}14}{\sqrt{1-(2{,}14/2\cdot 1{,}69)^2}} = 2{,}76 \text{ см.}$$

Тогда длины ступенек будут равны:

- длина 1-й ступеньки

$$\ell_{c1} = \lambda_{c1}/4 = 3{,}01/4 = 0{,}75 \text{ см,}$$

- длина 2-й ступеньки

$$\ell_{c2} = \lambda_{c2}/4 = 2{,}76/4 = 0{,}69 \text{ см.}$$

2.21. Определить размеры поперечного сечения a_{c1}, b_{c1} и a_{c2}, b_{c2}, а также длину ℓ_{c1}, ℓ_{c2} ступенек четвертьволнового широкополосного трансформатора, согласующего отрезки волноводов МЭК-180 с размерами $a_1 \times b_1 = 12{,}95 \times 6{,}48$ мм и МЭК-120 с размерами $a_2 \times b_2 = 19{,}05 \times 9{,}525$ мм (рис. 2.15).

По первому волноводу проходит волна типа H_{10} с частотой f = 18 ГГц.

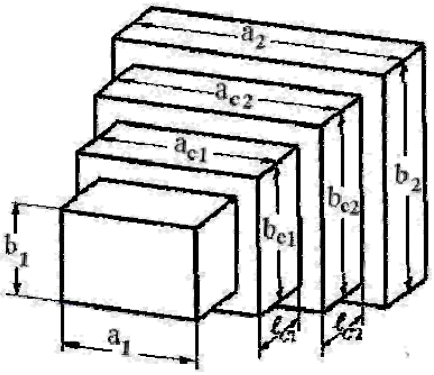


Рис. 2.15

Р е ш е н и е. Найдем сначала длины волн в свободном пространстве для согласуемых волноводов:

- для первого волновода

$$\lambda_1 = \frac{c}{f_1} = \frac{3\cdot 10^8}{18\cdot 10^9} = 1{,}67 \text{ см,}$$

- для второго волновода

$$\lambda_2 = \frac{c}{f_2} = \frac{3\cdot 10^8}{12\cdot 10^9} = 2{,}5 \text{ см.}$$

Среднюю длину волны трансформирующего двухступенчатого волновода найдем так же, как и для промежуточного волновода МЭК-140:

$$\lambda_c = \frac{c}{f_c} = \frac{3\cdot 10^8}{14\cdot 10^9} = 2{,}143 \text{ см.}$$

Кроме того, будем исходить из предположения, что для трансформатора, как и для стыкуемых волноводов, в формуле для волнового сопротивления по мощности и напряжению

$$W_{P,U} = W = \frac{2b}{a}\frac{W_0}{\sqrt{1-(\lambda/2a)^2}}$$

между поперечными размерами стенок выполняется соотношение

$$a = 2b.$$

Тогда :

- для первого волновода

$$W_1 = \frac{W_0}{\sqrt{1-(\lambda_1/2a_1)^2}} = \frac{377}{\sqrt{1-(1{,}67/2\cdot 1{,}295)^2}} = 493 \text{ Ом},$$

- для второго волновода

$$W_2 = \frac{W_0}{\sqrt{1-(\lambda_2/2a_2)^2}} = \frac{377}{\sqrt{1-(2{,}5/2\cdot 1{,}905)^2}} = 500 \text{ Ом}.$$

Волновое сопротивление эквивалентной промежуточной ступеньки $W_т$ согласно (2.6)

$$W_т = \sqrt{W_1 W_2} = \sqrt{493\cdot 500} = 496 \text{ Ом},$$

а волновые сопротивления каждой из ступенек в соответствии с (2.18) и (2.19) определим так:

$$W_{c1} = \sqrt{W_1 W_т} = \sqrt{W_1\sqrt{W_1 W_2}} = \sqrt{493\cdot 496} = 494{,}7 \text{ Ом}, \qquad (2.20)$$

$$W_{c2} = \sqrt{W_2 W_т} = \sqrt{W_2\sqrt{W_1 W_2}} = \sqrt{500\cdot 496} = 498 \text{ Ом}. \qquad (2.21)$$

С другой стороны, для волновых сопротивлений W_3 и W_4

$$W_{c1} = \frac{377}{\sqrt{1-(\lambda_c/2a_{c1})^2}}, \qquad (2.22)$$

$$W_{c2} = \frac{377}{\sqrt{1-(\lambda_c/2a_{c2})^2}}. \qquad (2.23)$$

Тогда, приравнивая (2.20) к (2.22), получаем

$$\sqrt{1-\left(\frac{\lambda_c}{2a_{c1}}\right)^2} = \frac{377}{494{,}7} = 0{,}762 \;\Rightarrow\; 1-\left(\frac{\lambda_c}{2a_{c1}}\right)^2 = 0{,}581 \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\; \left(\frac{\lambda_c}{2a_{c1}}\right)^2 = 0{,}419 \;\Rightarrow\; \frac{\lambda_c}{2a_{c1}} = 0{,}648 \;\Rightarrow\; a_{c1} = \frac{\lambda_c}{2\cdot 0{,}648} \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\; a_{c1} = \frac{2{,}143}{2\cdot 0{,}648} = 1{,}65 \text{ см} \quad \Rightarrow\; b_{c1} = \frac{a_{c1}}{2} = 0{,}83 \text{ см},$$

а после сопоставления (2.21) и (2.23) найдем

$$\sqrt{1-\left(\frac{\lambda_c}{2a_{c2}}\right)} = \frac{377}{498} = 0{,}757 \;\Rightarrow\; 1-\left(\frac{\lambda_c}{2a_{c2}}\right)^2 = 0{,}573 \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(\frac{\lambda_c}{2a_{c2}}\right)^2 = 0{,}427 \;\Rightarrow\; \frac{\lambda_c}{2a_{c2}} = 0{,}653 \;\Rightarrow\; a_{c2} = \frac{\lambda_c}{2\cdot 0{,}653} \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\; a_{c2} = \frac{2{,}143}{2\cdot 0{,}653} = 1{,}64 \text{ см} \quad \Rightarrow\; b_{c2} = \frac{a_{c2}}{2} = 0{,}82 \text{ см.}$$

Длина волны в первой ступеньке

$$\lambda_{c1} = \frac{\lambda_c}{\sqrt{1-(\lambda_c/2a_{c1})^2}} = \frac{2{,}143}{\sqrt{1-(2{,}143/2\cdot 1{,}65)^2}} = 2{,}82 \text{ см,}$$

тогда длина первой ступеньки

$$\ell_{c1} = \lambda_{c1}/4 = 2{,}82/4 = 0{,}705 \text{ см.}$$

Длина волны во второй ступеньке

$$\lambda_{c2} = \frac{\lambda_c}{\sqrt{1-(\lambda_c/2a_{c2})^2}} = \frac{2{,}143}{\sqrt{1-(2{,}143/2\cdot 1{,}64)^2}} = 2{,}83 \text{ см,}$$

тогда длина второй ступеньки

$$\ell_{c2} = \lambda_{c2}/4 = 2{,}83/4 = 0{,}707 \text{ см.}$$

2.22. Для крепления внутреннего проводника в центре коаксиальной линии используют диэлектрические шайбы. Скачок волнового сопротивления линии на участке шайбы вызовет появление отраженных от нее волн. Эскиз неотражающей шайбы показан на рис. 2.16.

Определить диаметр внешнего проводника D и глубину кольцевой проточки t , если диаметр центрального проводника d = 3 мм, волновое сопротивление линии W = 50 Ом, а шайба изготовлена из фторопласта-4 с $\varepsilon = 2{,}1$.

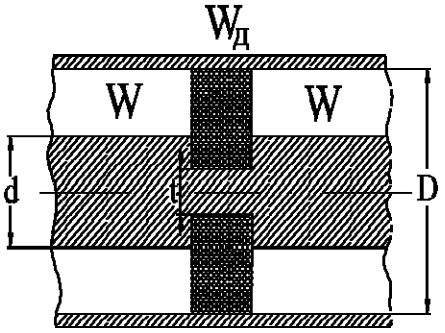


Рис. 2.16

Р е ш е н и е. Шайба является четвертьволновым диэлектрическим трансформатором с волновым сопротивлением

$$W_д = \frac{138}{\sqrt{\varepsilon}} \lg \frac{D}{t}, \tag{2.24}$$

которое в соответствии с условием трансформации

$$W_д = \sqrt{WW} = W,$$

а волновое сопротивление линии

$$W=138\lg\frac{D}{d}.$$

Из последнего выражения находим

$$\lg\frac{D}{d}=\frac{W}{138}=\frac{50}{138}=0{,}362 \;\Rightarrow\; \frac{D}{d}=10^{0{,}362}=2{,}3 \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\; D=2{,}3d=2{,}3\cdot 3=6{,}9 \text{ мм.}$$

Подставляя найденное значение D в (2.24), получаем

$$\frac{138}{\sqrt{\varepsilon}}\lg\frac{D}{t}=W \;\Rightarrow\; \lg\frac{D}{t}=\frac{W\sqrt{\varepsilon}}{138}=\frac{50\cdot\sqrt{2{,}1}}{138}=0{,}525 \;\Rightarrow\; \frac{D}{t}=10^{0{,}525} \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\; \frac{D}{t}=3{,}35 \;\Rightarrow\; t=\frac{D}{3{,}35}=\frac{6{,}9}{3{,}35}=2{,}06 \text{ мм.}$$

2.23. Радиусы внутреннего и внешнего проводников коаксиальной линии с воздушным заполнением составляют: R_1 = 3 мм, R_2 = 10,5 мм. Средняя мощность, передаваемая по линии, $P_{ср}$ = 5 КВт. Определить амплитуду напряженности электрического поля на поверхности внутреннего и внешнего проводников, а также эквивалентное напряжение и ток в линии [3].

Р е ш е н и е. Необходимо получить выражение, связывающее передаваемую мощность с напряженностью электрического поля в линии.

Средняя мощность, передаваемая по линии, определяется формулой

$$P_{ср}=\frac{1}{2W_л}\int_{S_\perp}|E(x,y)|^2 ds=\frac{W_л}{2}\int_{S_\perp}|H(x,y)|^2 ds, \qquad (2.25)$$

где E(x,y), H(x,y) – комплексные амплитуды векторов поля в поперечном сечении линии,

$S_\perp$ – площадь поперечного сечения линии.

Учитывая, что волновые сопротивления коаксиальной линии и свободного пространства равны, записываем (2.25) в цилиндрической системе координат:

$$P_{ср}=\frac{1}{2W_0}\int_{S_\perp}|E_r|^2 ds=\frac{1}{2W_0}\int_{R_1}^{R_2}\int_0^{2\pi}|E_r|^2 r dr d\varphi, \qquad (2.26)$$

где E_r- радиальная составляющая поля волны типа ТЕМ в коаксиальной линии,

$$E_r=E_0\frac{R_1}{r}e^{-i\beta z}; \qquad (2.27)$$

E_0 – комплексная амплитуда напряженности электрического поля на поверхности проводника;

$\beta = 2\pi/\lambda = k -$ волновое число в коаксиальной линии, равное при воздушном заполнении фазовому числу свободного пространства.

Положив в (2.27) $z = 0$ и подставив E_r в (2.26), получим

$$P_{ср} = \frac{\pi|E_0|^2}{W_0} R_1^2 \int_{R_1}^{R_2} \frac{dr}{r} = \frac{\pi|E_0|^2}{W_0} R_1^2 \ln\frac{R_2}{R_1},$$

откуда найдем амплитуду напряженности электрического поля у поверхности центрального проводника:

$$|E_0| = \frac{1}{R_1}\sqrt{\frac{W_0 P_{ср}}{\pi \ln(R_2/R_1)}} = \frac{1}{3\cdot 10^{-3}}\sqrt{\frac{120\pi\cdot 5\cdot 10^3}{\pi\cdot\ln(10{,}5/3)}} = 2{,}31\cdot 10^5 \text{ В/м}.$$

Положив в (2.27) $r = R_2$, вычислим амплитуду напряженности электрического поля у поверхности внешнего проводника

$$|E_{внешн}| = |E_0|\frac{R_1}{R_2} = 2{,}31\cdot 10^5 \cdot \frac{3}{10{,}5} = 0{,}66\cdot 10^5 \text{ В/м}.$$

Амплитуду эквивалентного напряжения между внутренним и внешним проводниками найдем из соотношения

$$U = \int_{R_1}^{R_2} E_r dr = E_0 R_1 \int_{R_1}^{R_2} \frac{dr}{r} = E_0 R_1 \ln\frac{R_2}{R_1} = 2{,}31\cdot 10^5 \cdot 3\cdot 10^{-3} \ln\frac{10{,}5}{3} = 867 \text{ В}.$$

Амплитуда эквивалентного тока, текущего по поверхности центрального проводника, в соответствии с законом полного тока

$$I = \oint_L \vec{H}_\tau d\vec{\ell} = \int_0^{2\pi} H_\varphi r d\varphi, \qquad (2.28)$$

где $H_\varphi -$ аксиальная составляющая напряженности магнитного поля волны типа ТЕМ в коаксиальной линии

$$H_\varphi = E_r / W_0.$$

Тогда из выражения (2.28) при $r = R_1$

$$I = \frac{2\pi R_1 E_0}{W_0} = \frac{2\pi\cdot 3\cdot 10^{-3}\cdot 2{,}31\cdot 10^5}{120\pi} = 11{,}5 \text{ А}.$$

Ток такой же величины течет и по внешнему проводнику.

2.24. Коаксиальная линия со сплошным полиэтиленовым заполнением ($\varepsilon = 2{,}4$; $\sigma = 3\cdot 10^{-4}$ См м/м) имеет радиус внутреннего проводника R_1 = 0,8 мм, внешнего – R_2 = 2,9 мм. Проводники изготовлены из латуни ($\sigma_м = 2{,}3\cdot 10^7$ См/м). Определить постоянную затухания линии и ее

коэффициент полезного действия, если длина линии $\ell = 10$ м, а ее частота $f = 3$ ГГц.

Р е ш е н и е. Постоянная затухания линии $\alpha_л^д$, обусловленная потерями электромагнитной энергии в неидеальном диэлектрике:

$$\alpha_л^д = \frac{\pi \mathrm{tg}\Delta}{\lambda_д \sqrt{1-(\lambda/\lambda_{кр})^2}}, \qquad (2.29)$$

где $tg\Delta$ – тангенс угла диэлектрических потерь, определяемый из выражения (1.22) для комплексной диэлектрической проницаемости,

$$\mathrm{tg}\Delta = \frac{60\lambda\sigma}{\varepsilon}, \qquad (2.30)$$

а $\lambda_{кр}$- критическая длина волны для линии передачи, для коаксиальной линии с волной ТЕМ

$$\lambda_{кр} = \infty.$$

Поскольку длина волны в диэлектрическом заполнении

$$\lambda_д = \lambda / \sqrt{\varepsilon},$$

из выражения (2.29) находим

$$\alpha_л^д = \frac{60\pi\sigma}{\sqrt{\varepsilon}}, \qquad (2.31)$$

т.е. в линиях с волнами типа ТЕМ потери энергии в диэлектрике не зависят от частоты. Такие линии ***недисперсны***.

Тогда постоянная затухания в полиэтиленовом заполнении

$$\alpha_л^д = \frac{60\pi \cdot 3 \cdot 10^{-4}}{\sqrt{2{,}4}} = 3{,}65 \cdot 10^{-2}\ 1/\text{м}.$$

Постоянная затухания $\alpha_л^м$, обусловленная потерями энергии в проводниках с конечной проводимостью, определяется формулой [5]

$$\alpha_л^м = \frac{R_s}{2W_л} \frac{\int\limits_{S_L} |H_\tau|^2 ds}{\int\limits_{S_\perp} |H(x,y)|^2 ds}, \qquad (2.32)$$

где S_L – площадь проводников линии длиной 1 м;

R_s – поверхностное сопротивление металла:

$$R_s = \sqrt{\frac{\omega\mu}{2\sigma}}; \qquad (2.33)$$

$W_л$ – волновое сопротивление линии:

$$W_л = W_0 / \sqrt{\varepsilon}.$$

Интеграл в числителе пропорционален потерям мощности в проводниках линии длиной 1 м

$$\int_{S_L}|H_\tau|^2 ds = \int_0^{2\pi}\int_0^1 |H_\varphi|^2 r d\varphi dz\Big|_{r=R_1} + \int_0^{2\pi}\int_0^1 |H_\varphi|^2 r d\varphi dz\Big|_{r=R_2} =$$

$$= \frac{|E_0|^2}{W_л^2}\left(R_1\int_0^{2\pi} d\varphi + \frac{R_1^2}{R_2}\int_0^{2\pi} d\varphi\right) = \frac{2\pi|E_0|^2 R_1^2}{W_л^2}\left(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}\right).$$

Интеграл в знаменателе пропорционален средней передаваемой мощности

$$\int_{S_\perp}|H(r,\varphi|^2 ds = \int_{R_1}^{R_2}\int_0^{2\pi}|H_\varphi|^2 r dr d\varphi = \frac{|E_0|^2 R_1^2}{W_л^2}\int_{R_1}^{R_2}\int_0^{2\pi}\frac{dr d\varphi}{r} = \frac{2\pi|E_0|^2 R_1^2}{W_л^2}\ln\frac{R_2}{R_1}.$$

После подстановки найденных выражений в (2.32) получаем

$$\alpha_л^м = \frac{R_s}{2W_л R_2 \ln(R_2/R_1)}\left(1+\frac{R_2}{R_1}\right). \qquad (2.34)$$

Поверхностное сопротивление в (2.34), определяемое формулой (2.33), пропорционально корню квадратному из частоты, поэтому потери энергии в металле растут с увеличением частоты. На частоте f = 3 ГГц

$$R_s = \sqrt{\frac{\omega\mu_м}{2\sigma_м}} = \sqrt{\frac{2\pi\cdot 3\cdot 10^9\cdot 4\pi\cdot 10^{-7}}{2\cdot 2{,}3\cdot 10^7}} = 2{,}27\cdot 10^{-2}\ \text{Ом},$$

а коэффициент затухания в металле

$$\alpha_л^м = \frac{2{,}27\cdot 10^{-2}\sqrt{2{,}4}}{2\cdot 120\pi\cdot 2{,}9\cdot 10^{-3}\ln(2{,}9/0{,}8)}\left(1+\frac{2{,}9}{0{,}8}\right) = 5{,}78\cdot 10^{-2}\ 1/\text{м}.$$

Постоянная затухания в линии (***погонное затухание***)

$$\alpha_л = \alpha_л^д + \alpha_л^м = (3{,}65+5{,}76)\cdot 10^{-2} = 9{,}43\cdot 10^{-2}\ 1/\text{м}.$$

Часто погонное затухание выражают в децибелах:

$$\alpha_{л.дБ} = 10\lg\alpha_л,$$

тогда

$$\alpha_{л.дБ} = 10\lg 0{,}0943 = -10{,}255\ \text{дБ/м}.$$

Иногда для передающих линий затухание определяют как величину

$$L = 10\lg\frac{P_{вх}}{P_{вых}} = 10\lg\frac{P_{вх}}{P_{вх}e^{-2\alpha\ell}} = 10\lg e^{2\alpha\ell} = 8{,}686\alpha\ell.$$

Тогда

$$L = 8{,}686\cdot 9{,}43\cdot 10^{-2} = 0{,}82\ \text{дБ/м}.$$

Зная постоянную затухания, можно найти КПД линии

$$\eta = \frac{P_{вых}}{P_{вх}} = \frac{P_{вх} e^{-2\alpha\ell}}{P_{вх}} = e^{-2\alpha\ell} = \exp\left(-2 \cdot 9{,}43 \cdot 10^{-2} \cdot 10\right) = 0{,}154.$$

2.25. Определить предельную мощность, которую можно передать по волноводу МЭК-100 сечением $a \times b = 23 \times 10$ мм на частоте f = 9375 МГц, если волновод заполнен воздухом.

Р е ш е н и е. Найдем сначала длину волны в свободном пространстве:

$$\lambda = \frac{c}{f} = \frac{3 \cdot 10^8}{9{,}375 \cdot 10^9} = 3{,}2 \text{ см}.$$

Средняя мощность, передаваемая по передающей линии, определяется выражением (2.25), в котором для прямоугольного волновода с волной типа H_{10}

$$W_л = W_H = \frac{W_0}{\sqrt{1 - (\lambda / 2a)^2}}.$$

Напряженность электрического поля волны H_{10} при выборе начала координат в середине поперечного сечения волновода имеет вид

$$E_y = E_0 \cos\left(\frac{\pi x}{a}\right) e^{-i\beta z}, \qquad (2.35)$$

где E_0 – максимальная напряженность электрического поля в середине широкой стенки волновода.

Тогда

$$P_{ср} = \frac{1}{2 W_H} \int\limits_{S\perp} \left|E_y\right|^2 ds = \frac{\left|E_0\right|^2}{2 W_H} \int\limits_{-b/2}^{b/2} \int\limits_{-a/2}^{a/2} \cos^2\left(\frac{\pi x}{2}\right) dxdy =$$

$$= \frac{\left|E_0\right|^2 b}{2 W_H} \int\limits_{-a/2}^{a/2} \left\{\frac{1}{2}\left[1 + \cos\left(\frac{2\pi x}{a}\right)\right]\right\} dx = \frac{\left|E_0\right|^2 ab}{4 W_H} = \frac{\left|E_0\right|^2 ab}{4 W_0} \sqrt{1 - \left(\frac{\lambda}{2a}\right)^2}.$$

Передаваемая мощность ограничена возможностью электрического пробоя диэлектрика. Пробивная прочность воздуха при давлении в 1 атм, относительной влажности 60% и температуре 20°С составляет $E_{пр}$ = 30 КВ/см. Обычно выполняют не менее чем трехкратный запас по пробивной напряженности

$$E_{пр} = \frac{E_0}{3}.$$

Тогда предельная передаваемая мощность

$$E_{ср}^{пр} = \frac{9 \cdot 10^8 \cdot 2{,}3 \cdot 1}{9 \cdot 4 \cdot 120\pi} \sqrt{1 - \left(\frac{3{,}2}{4{,}6}\right)^2} = 110 \text{ КВт}.$$

Для повышения передаваемой мощности необходимо увеличивать пробивную прочность воздуха, что возможно при увеличении или

уменьшении давления. Иногда волновод заполняют ***элегазом*** (шестифтористая сера SF_6), пробивная прочность которого $E_{пр}$ = 90 КВ/см.

2.26. Фидерный тракт радиолокационной станции представляет собой прямоугольный волновод сечением $a \times b = 28{,}5 \times 12{,}5$ мм, стенки которого выполнены из серебра ($\sigma = 6{,}6 \cdot 10^7$ Сим/м). Диэлектрик – воздух, тип волны – H_{10}, частота станции f = 7,5 ГГц. Определить постоянную затухания волновода и потери мощности, если длина тракта $\ell = 4$ м, а средняя передаваемая мощность $P_{ср}$ = 10 КВт [3].

Р е ш е н и е. Для волновода с воздушным заполнением потерями в диэлектрике можно пренебречь и постоянную затухания определить с помощью формулы (2.32):

$$\alpha_л = \frac{R_s}{2W_H} \frac{\int\limits_{S_L} |H_\tau|^2 ds}{\int\limits_{S_\perp} |H(x,y)|^2 ds}.$$

Выражения для магнитных составляющих поля волны типа H_{10} найдем из второго уравнения Максвелла, пользуясь формулой (2.35) для составляющей E_y. Учтем, что для этого типа волны составляющие поля $E_x = E_z = 0$:

$$\mathrm{rot}\vec{E} = -i\omega\mu_0\vec{H} \;\Rightarrow\; \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ E_x & E_y & E_z \end{vmatrix} = -i\omega\mu_0\vec{H},$$

откуда

$$H_x = -\frac{\beta}{\omega\mu_0} E_0 \cos\left(\frac{\pi x}{a}\right) e^{-i\beta z}, \tag{2.36}$$

$$H_z = -i\frac{\pi}{\omega\mu_0 a} E_0 \sin\left(\frac{\pi x}{a}\right) e^{-i\beta z}, \tag{2.37}$$

где

$$\beta = \sqrt{k^2 - \left(\frac{\pi}{a}\right)^2} = k\sqrt{1 - \left(\frac{\lambda}{2a}\right)^2} = k\sqrt{1 - \left(\frac{\lambda}{\lambda_{кр}}\right)^2} \tag{2.38}$$

– продольное волновое число для волны H_{10}.

Так как

$$\omega\mu_0 = \omega\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}\,\frac{\mu_0}{\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}} = k\sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}} = kW_0,$$

то

$$\frac{\beta E_0}{\omega\mu_0}=\frac{k\sqrt{1-(\lambda/\lambda_{кр})^2}E_0}{kW_0}=\sqrt{1-\left(\frac{\lambda}{\lambda_{кр}}\right)^2}H_0=\frac{\lambda}{\lambda_в}H_0, \qquad (2.39)$$

$$\frac{\pi E_0}{\omega\mu_0 a}=\frac{\pi E_0}{2\pi f\mu_0 a}=\frac{\pi E_0\lambda}{2\pi c\mu_0 a}=\frac{\pi E_0\lambda\sqrt{\mu_0\varepsilon_0}}{2\pi\mu_0 a}=\frac{\lambda}{2a}\frac{E_0}{W_0}=\frac{\lambda}{\lambda_{кр}}H_0. \qquad (2.40)$$

Тогда

$$H_x=-H_0\frac{\lambda}{\lambda_в}\cos\left(\frac{\pi x}{a}\right)e^{-i\beta\beta}, \qquad (2.41)$$

$$H_z=-iH_0\frac{\lambda}{\lambda_{кр}}\sin\left(\frac{\pi x}{a}\right)e^{-i\beta\beta}. \qquad (2.42)$$

Интеграл, стоящий в числителе (2.32), пропорционален мощности потерь в стенках волноводов длиной $\ell=1$м. Его можно представить как сумму интегралов по четырем боковым стенкам. Из структуры поля волны H_{10} следует, что интегралы по верхней и нижней, а также по левой и правой стенкам попарно равны. Поэтому

$$\int\limits_{S_L}|H_\tau|^2\,ds=2\int\limits_{-a/2}^{a/2}\int\limits_0^1|H_\tau|^2\,dxdz+2\int\limits_{-b/2}^{b/2}\int\limits_0^1|H_\tau|^2\,dydz.$$

Вычислим эти интегралы, учитывая соотношения (2.41) и (2.42):

- для широких стенок

$$\int\limits_{-a/2}^{a/2}\int\limits_0^1|H_\tau|^2\,dxdz=\int\limits_{-a/2}^{a/2}\left(|H_x|^2+|H_z|^2\right)\Big|_{y=\pm\frac{b}{2}}dx=$$

$$=|H_0|^2\int\limits_{-a/2}^{a/2}\left[\left(\frac{\lambda}{\lambda_в}\right)^2\cos^2\left(\frac{\pi x}{a}\right)+\left(\frac{\lambda}{\lambda_{кр}}\right)^2\sin^2\left(\frac{\pi x}{a}\right)\right]dx=$$

$$=|H_0|^2\frac{a}{2}\left[\left(\frac{\lambda}{\lambda_в}\right)^2+\left(\frac{\lambda}{\lambda_{кр}}\right)^2\right]=\frac{|H_0|^2 a}{2}\left[1-\left(\frac{\lambda}{2a}\right)^2+\left(\frac{\lambda}{2a}\right)^2\right]=\frac{|H_0|^2 a}{2};$$

- для узких стенок

$$\int\limits_{-b/2}^{b/2}\int\limits_0^1|H_\tau|dydz=\int\limits_{-b/2}^{b/2}|H_z|^2\Big|_{x=\pm\frac{a}{2}}dy=|H_0|^2\left(\frac{\lambda}{\lambda_{кр}}\right)^2\int\limits_{-b/2}^{b/2}dy=|H_0|^2 b\left(\frac{\lambda}{\lambda_{кр}}\right)^2.$$

Тогда

$$\int_{S_L} |H_\tau|^2 \, ds = |H_0|^2 a \left[1 + \frac{2b}{a} \left(\frac{\lambda}{2a} \right)^2 \right].$$

Интеграл, стоящий в знаменателе, пропорционален средней передаваемой мощности. В случае волны H_{10}

$$\int_{S_\perp} |H(x, y)|^2 ds = \int_{-a/2}^{a/2} \int_{-b/2}^{b/2} |H_x|^2 dxdy = |H_0|^2 b \left(\frac{\lambda}{\lambda_в} \right)^2 \int_{-a/2}^{a/2} \cos^2 \left(\frac{\pi x}{a} \right) dx =$$

$$= |H_0|^2 \frac{ab}{2} \left(\frac{\lambda}{\lambda_в} \right)^2.$$

Подставив полученные значения интегралов в формулу для коэффициента затухания, найдем

$$\alpha_л = \frac{R_s \left[1 + \frac{2b}{a} \left(\frac{\lambda}{2a} \right)^2 \right]}{bW_0 \sqrt{1 - (\lambda / 2a)^2}}. \qquad (2.43)$$

Определим значения величин, входящих в выражение (2.43):

- длина волны в свободном пространстве

$$\lambda = \frac{c}{f} = \frac{3 \cdot 10^8}{7{,}5 \cdot 10^9} = 4 \text{ см};$$

- поверхностное сопротивление

$$R_s = \sqrt{\frac{2\pi f \mu_м}{2\sigma_м}} = \sqrt{\frac{2\pi \cdot 7{,}5 \cdot 10^9 \cdot 4\pi \cdot 10^{-7}}{2 \cdot 6{,}6 \cdot 10^7}} = 2{,}2 \cdot 10^{-2} \text{ Ом};$$

- критическая длина волны

$$\lambda_{кр} = 2a = 2 \cdot 2{,}85 = 5{,}7 \text{ см};$$

- отношение

$$2b / a = 2 \cdot 1{,}25/2{,}85 = 0{,}877;$$

- отношение

$$(\lambda / 2a)^2 = (4/5{,}7)^2 = 0{,}492.$$

Тогда постоянная затухания

$$\alpha_л = \frac{2{,}2 \cdot 10^{-2} (1 + 0{,}877 \cdot 0{,}492)}{1{,}25 \cdot 377 \sqrt{1 - 0{,}492}} = 9{,}37 \cdot 10^{-5} \ 1/м.$$

Зная постоянную затухания и мощность, передаваемую по волноводу, можно найти мощность потерь

$$\alpha_л = \frac{P^п_{ср}}{2P_{ср}},$$

в которой $P^{п}_{ср}$ определяет среднюю мощность потерь на единицу длины линии. Отсюда полная средняя мощность потерь фидерного тракта длиной ℓ

$$P^{п}_{ср}(\ell) = 2\alpha_{л} P_{ср}\ell = 2 \cdot 9{,}37 \cdot 10^{-5} \cdot 10^{4} \cdot 4 = 7{,}5 \text{ Вт}.$$

Если РЛС работает в импульсном режиме, то среднюю мощность необходимо разделить на коэффициент заполнения импульса или умножить на скважность импульсов.

2.27. На рис. 2.17 изображены два параллельных одинаковых прямоугольных волновода, соединенных между собой по узкой стенке с помощью щели длиной ℓ и высотой, равной высоте волноводов. Частота волны $f = 7{,}5$ ГГц. Сечение каждого из волноводов $a \times b = 28{,}5 \times 12{,}8$ мм. Диэлектрик – воздух. Определить длину щели ℓ и условия, при которых мощность, поступающая на вход 1, делится пополам между входами 3 и 4 [3].

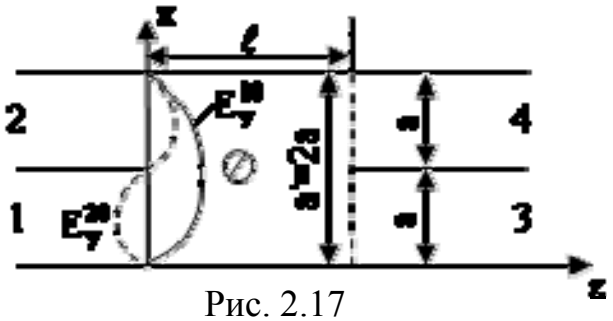


Рис. 2.17

Р е ш е н и е. Найдем длину волны в свободном пространстве

$$\lambda = \frac{c}{f} = \frac{3 \cdot 10^{8}}{7{,}5 \cdot 10^{9}} = 4 \text{ см}.$$

В области щели устройство представляет собой прямоугольный волновод, размер широкой стенки которого $a' = 2a = 57$ мм. В таком волноводе кроме волны H_{10} может распространяться волна H_{20}, так как $\lambda^{20}_{кр} = a' > \lambda$. Волны других типов распространяться не будут. Таким образом, электромагнитное поле на входах 2, 3 и 4 равно сумме полей двух волн – H_{10} и H_{20}. Эпюры распределения амплитуд напряженности электрического поля этих волн в сечении $z = 0$ показаны на рис. 2.17.

Напряженность поля волны H_{10} (см. рис. 2.15) запишем так:

$$E^{10}_{y} = E^{10}_{0} \sin\left(\frac{\pi x}{a'}\right) e^{-i\beta_{10} z} = E^{10}_{0} \sin\left(\frac{\pi x}{2a}\right) e^{-i\beta_{10} z}, \qquad (2.44)$$

где E^{10}_{0} – максимальная амплитуда поля волны H_{10} при $x = a$.

Для волны H_{20}

$$E_y^{20} = E_0^{20} \sin\left(\frac{\pi x}{a}\right) e^{-i\beta_{20} z}. \qquad (2.45)$$

Вычислим постоянные E_0^{10} и E_0^{20}. Максимальное значение напряженности электрического поля на входе 2 (при z = 0, x = 1,5a)

$$E_{2y}^{m} = E_y^{10} + E_y^{20} = E_0^{10} \sin\left(\frac{3\pi}{4}\right) + E_0^{20} \sin\left(\frac{3\pi}{2}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} E_0^{10} - E_0^{20}.$$

По условию задачи энергия, поступающая на вход 1, должна делиться пополам между входами 3 и 4, т.е. не должна поступать на вход 2. Это условие выполняется, если

$$E_{2y}^{m} = 0 \quad \Rightarrow \quad E_0^{10} = \sqrt{2} E_0^{20}. \qquad (2.46)$$

Физически при выполнении условия (2.46) в центре входа 2 электрические поля волн H_{10} и H_{20} взаимно скомпенсированы вследствие их противофазности. Условие (2.46) обеспечивается с помощью регулировочного винта, помещаемого в центре щели. Этот винт расположен в максимуме напряженности электрического поля волны H_{10} и существенно влияет на амплитуду вектора $\vec{E}$. В то же время он не влияет на волну H_{20}.

В центре входа 1 (z = 0, x = 0,5a) с учетом условия (2.46)

$$E_{1y}^{m} = E_y^{10} + E_y^{20} = E_0^{10} \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) + E_0^{20} \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} E_0^{10} + E_0^{20} = 2E_0^{20}.$$

С другой стороны, максимальная амплитуда напряженности электрического поля питающей волны (при z = 0, x = 0,5a) согласно (2.45)

$$E_{1y}^{m} = E_0 \sin\left(\frac{\pi x}{a}\right) e^{-i\beta_{10} z} = E_0.$$

Отсюда получаем

$$E_0^{20} = E_0 / 2.$$

Окончательно выражения (2.44) и (2.45) с учетом последнего соотношения и условия (2.46) запишем в виде

$$E_y^{10} = \frac{\sqrt{2}}{2} E_0 \sin\left(\frac{\pi x}{2a}\right) e^{-i\beta_{10} z},$$

$$E_y^{20} = \frac{E_0}{2} \sin\left(\frac{\pi x}{a}\right) e^{-i\beta_{20} z}.$$

Найдем максимальное значение напряженности электрического поля на входах 3 и 4 в сечении $z = \ell$:

- на входе 3 (при x = 0,5a)

$$E_{3y}^{m} = E_{y}^{10} + E_{y}^{20} = \frac{\sqrt{2}}{2} E_0 \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) e^{-i\beta_{10}\ell} + \frac{E_0}{2} \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) e^{-i\beta_{20}\ell} =$$

$$= \frac{E_0}{2}\left(1 + e^{i\Delta\Delta}\right) e^{-i\beta_{10}\ell},$$

- на входе 4 (при x = 1,5a)

$$E_{4y}^{m} = E_{y}^{10} + E_{y}^{20} = \frac{\sqrt{2}}{2} E_0 \sin\left(\frac{3\pi}{4}\right) e^{-i\beta_{10}\ell} + \frac{E_0}{2} \sin\left(\frac{3\pi}{2}\right) e^{-i\beta_{20}\ell} =$$

$$= \frac{E_0}{2}\left(1 - e^{i\Delta\Delta}\right) e^{-i\beta_{10}\ell},$$

где

$$\Delta\psi = \left(\beta_{10} - \beta_{20}\right)\ell = \left(\frac{2\pi}{\lambda_{10}} - \frac{2\pi}{\lambda_{20}}\right)\ell \quad , \qquad (2.47)$$

а λ_{10} и λ_{20} – длины волн H_{10} и H_{20}.

Величина $\Delta\psi$ представляет собой фазовый сдвиг между волнами H_{10} и H_{20} в сечении $z = \ell$, вызванный различными фазовыми скоростями этих волн.

Равенство мощностей на входах 3 и 4 возможно, если $\left|E_{3y}^{m}\right| = \left|E_{4y}^{m}\right|$. Выполнить его можно только при $\Delta\psi = (2n+1)\pi/2$, где $n = 0, 1, 2, ...$ В этом случае при $\Delta\psi = \pi/2$

$$E_{3y}^{m} = \frac{E_0}{2}\left(1 + e^{i\frac{\pi}{2}}\right) e^{-i\beta_{10}z} = \frac{E_0}{2}\left(1 + i\right) e^{-i\beta_{10}z} = \frac{\sqrt{2}}{2} E_0 e^{i\frac{\pi}{4}} e^{-i\beta_{10}z},$$

$$E_{4y}^{m} = \frac{E_0}{2}\left(1 - e^{i\frac{\pi}{2}}\right) e^{-i\beta_{10}z} = \frac{E_0}{2}\left(1 - i\right) e^{-i\beta_{10}z} = \frac{\sqrt{2}}{2} E_0 e^{-i\frac{\pi}{4}} e^{-i\beta_{10}z}.$$

Поскольку передаваемая мощность пропорциональна $\left|E_{y}^{m}\right|^2$, то мощность на входах 3 и 4 составляет половину мощности, подаваемой на вход 2. Кроме того, из отношения

$$\left|E_{3y}^{m} / E_{4y}^{m}\right| = e^{i\frac{\pi}{4}} / e^{-i\frac{\pi}{4}} = e^{i\frac{\pi}{2}}$$

видно, что электромагнитное поле на входе 3 опережает поле на входе 4 на $\pi/2$.

Длину щели ℓ находим из выражения (2.47)

$$\Delta\psi = \left(\frac{2\pi}{\lambda_{10}} - \frac{2\pi}{\lambda_{20}}\right)\ell = \frac{\pi}{2},$$

откуда

$$\ell = \frac{\lambda_{10}\lambda_{20}}{4(\lambda_{20} - \lambda_{10})}.$$

Длины волн вычислим по формулам

$$\lambda_{10} = \frac{\lambda}{\sqrt{1-(\lambda/4a)^2}} = \frac{4}{\sqrt{1-(4/4\cdot 2{,}85)^2}} = 4{,}27 \text{ см},$$

$$\lambda_{20} = \frac{\lambda}{\sqrt{1-(\lambda/2a)^2}} = \frac{4}{\sqrt{1-(4/2\cdot 2{,}85)^2}} = 5{,}62 \text{ см}.$$

Тогда длина щели

$$\ell = \frac{4{,}27\cdot 5{,}62}{4(5{,}62-4{,}27)} = 4{,}45 \text{ см}.$$

Таким образом, в рассмотренном ***волноводно-щелевом мосте*** мощность, подаваемая на вход 1, не поступает на вход 2, а делится пополам между входами 3 и 4, причем электромагнитное поле на входе 4 отстает по фазе от поля на входе 3 на угол $\pi/2$.

2.28. Для волноводно-щелевого моста (см. рис. 2.17), построенного на основе прямоугольных волноводов МЭК-120 с поперечным сечением каждого волновода $a\times b = 19{,}05\times 9{,}525$ мм и работающего на частоте $f = 12$ ГГц, определить длину щели ℓ, при которой мощности на входах 3 и 4 соотносятся как $P_3/P_4 = 1/3$. Найти фазовый сдвиг между электромагнитными полями на этих входах.

Р е ш е н и е. Первую часть задачи решают так же, как и в задаче 2.27. Находим сначала длину волны в свободном пространстве

$$\lambda = \frac{c}{f} = \frac{3\cdot 10^8}{12\cdot 10^9} = 2{,}5 \text{ с}.$$

На входах 2, 3 и 4 электромагнитное поле равно сумме полей волн H_{10} и H_{20}:

$$E_y^{10} = E_0^{10}\sin\left(\frac{\pi x}{2a}\right)e^{-i\beta_{10}z},$$

$$E_y^{20} = E_0^{20}\sin\left(\frac{\pi x}{a}\right)e^{-i\beta_{20}z}.$$

Постоянные возбуждения E_0^{10} и E_0^{20} определяют из условия, что энергия на вход 2 (при z = 0, x = 1,5a) не поступает:

$$E_{2y}^{m} = E_y^{10} + E_y^{20} = E_0^{10}\sin\left(\frac{3\pi}{4}\right) + E_0^{20}\sin\left(\frac{3\pi}{2}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}E_0^{10} - E_0^{20} = 0\,,$$

откуда получаем условие (2.46)

$$E_0^{10} = \sqrt{2}E_0^{20}\,.$$

В центре входа 1, т.е. при $z = 0$, $x = 0{,}5a$,

$$E_{1y}^{m} = E_y^{10} + E_y^{20} = E_0^{10}\sin\left(\frac{\pi}{4}\right) + E_0^{20}\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = E_0^{10}\frac{\sqrt{2}}{2} + E_0^{20} = 2E_0^{20} = E_0\,,$$

откуда

$$E_0^{20} = E_0/2\,.$$

Окончательно

$$E_y^{10} = E_0\frac{\sqrt{2}}{2}\sin\left(\frac{\pi x}{2a}\right)e^{-i\beta_{10}z},$$

$$E_y^{20} = \frac{E_0}{2}\sin\left(\frac{\pi x}{a}\right)e^{-i\beta_{20}z}.$$

На входах 3 и 4 максимальные значения напряженности электрического поля будут равны:

- на входе 3 (при $z = \ell$, $x = 0{,}5a$)

$$E_{3y}^{m} = E_y^{10} + E_y^{20} = E_0\frac{\sqrt{2}}{2}\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)e^{-i\beta_{10}\ell} + \frac{E_0}{2}\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)e^{-i\beta_{20}\ell} =$$

$$= \frac{E_0}{2}\left(1 + e^{i\Delta\Delta}\right)e^{-i\beta_{10}\ell}\,,$$

- на входе 4 (при $z = \ell$, $x = 1{,}5a$)

$$E_{4y}^{m} = E_y^{10} + E_y^{20} = E_0\frac{\sqrt{2}}{2}\sin\left(\frac{3\pi}{4}\right)e^{-i\beta_{10}\ell} + \frac{E_0}{2}\sin\left(\frac{3\pi}{2}\right)e^{-i\beta_{20}\ell} =$$

$$= \frac{E_0}{2}\left(1 - e^{i\Delta\psi}\right)e^{-i\beta_{10}\ell}\,,$$

где

$$\Delta\psi = \left(\beta_{10} - \beta_{20}\right)\ell = \left(\frac{2\pi}{\lambda_{10}} - \frac{2\pi}{\lambda_{20}}\right)\ell\,.$$

По условию

$$\frac{\left|E_{3y}^{m}\right|^2}{\left|E_{4y}^{m}\right|^2} = \frac{1}{3} \;\Rightarrow\; \frac{\left|E_{3y}^{m}\right|}{\left|E_{4y}^{m}\right|} = \frac{1}{\sqrt{3}} \;\Rightarrow\; \left|\sqrt{3}\left(1 + e^{i\Delta\psi}\right)\right| = \left|1 - e^{i\Delta\psi}\right| \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ \sqrt{3}\left|(1+\cos\Delta\psi)+i\sin\Delta\psi\right|=\left|(1-\cos\Delta\psi)-i\sin\Delta\psi\right|\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ \sqrt{3}\sqrt{(1+\cos\Delta\psi)^2+\sin^2\Delta\psi}=\sqrt{(1-\cos\Delta\psi)^2+\sin^2\Delta\psi}\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ \sqrt{3}\sqrt{2(1+\cos\Delta\psi)}=\sqrt{2(1-\cos\Delta\psi)}\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ 6+6\cos\Delta\psi=2-2\cos\Delta\psi\ \Rightarrow\ 8\cos\Delta\psi=-4\ \Rightarrow\ \cos\Delta\psi=-1/2\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ \Delta\psi=\arccos\left(-\frac{1}{2}\right)=\frac{2\pi}{3}.$$

Итак, если сдвиг по фазе между волнами H_{10} и H_{20} на входе 3 и 4 составляет $\Delta\psi=2\pi/3$, то мощности в этих плечах делятся в отношении 1/3.

Для определения длины щели из условия

$$\left(\frac{2\pi}{\lambda_{10}}-\frac{2\pi}{\lambda_{20}}\right)\ell=\frac{2\pi}{3} \qquad (2.48)$$

находим длины волн H_{10} и H_{20} в области щели:

$$\lambda_{10}=\frac{\lambda}{\sqrt{1-(\lambda/4a)^2}}=\frac{2{,}5}{\sqrt{1-(4\cdot1{,}905)^2}}=2{,}65\ \text{см},$$

$$\lambda_{20}=\frac{\lambda}{\sqrt{1-(\lambda/2a)^2}}=\frac{2{,}5}{\sqrt{1-(2\cdot1{,}905)^2}}=3{,}3\ \text{см}.$$

Тогда из (2.48) получим

$$\ell=\frac{\lambda_{10}\lambda_{20}}{3(\lambda_{20}-\lambda_{10})}=\frac{2{,}65\cdot3{,}3}{3\cdot(3{,}3-2{,}65)}\approx4{,}48\ \text{см}.$$

2.29. Определить критическую длину волны в круглом волноводе, в котором распространяется волна H_{11} с частотой f = 10 ГГц при длине волны в волноводе $\lambda_в=4{,}5$ см. Найти диаметр волновода [4].

Р е ш е н и е. Найдем сначала длину волны в свободном пространстве

$$\lambda=\frac{c}{f}=\frac{3\cdot10^8}{10\cdot10^9}=3\ \text{см}.$$

Длину волны в волноводе вычисляют по формуле

$$\lambda_в=\frac{\lambda}{\sqrt{1-(\lambda/\lambda_{кр})^2}},$$

откуда

$$\lambda_в^2\left[1-\left(\frac{\lambda}{\lambda_{кр}}\right)^2\right]=\lambda^2\ \Rightarrow\ \lambda_в^2-\frac{\lambda_в^2\lambda^2}{\lambda_{кр}^2}=\lambda^2\ \Rightarrow\ \lambda_в^2-\lambda^2=\frac{\lambda_в^2\lambda^2}{\lambda_{кр}^2}\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lambda_{кр}^2 = \frac{\lambda_в^2 \lambda^2}{\lambda_в^2 - \lambda^2} \Rightarrow \lambda_{кр} = \sqrt{\frac{\lambda_в^2 \lambda^2}{\lambda_в^2 - \lambda^2}} = \frac{\lambda}{\sqrt{1-(\lambda/\lambda_в)^2}}.$$

Тогда

$$\lambda_{кр} = \frac{3}{\sqrt{1-(3/4{,}5)^2}} = 4{,}03 \text{ см}.$$

Критическую длину волн типа ТЕ(Н) в круглых волноводах определяют из граничного условия

$$E_т\big|_{\rho=a} = E_\varphi\big|_{\rho=a} = 0 \Rightarrow J'_m\left(k_{кр}\rho\right)\big|_{\rho=a} = J'_m(\nu_{mn}) = 0, \qquad (2.49)$$

где а – радиус волновода, ν_{mn} – корни первой производной по аргументу от функции Бесселя m-го порядка, т.е. числа, которые определяют структуру поля в плоскости поперечного сечения волновода: m характеризует изменение поля по окружности волновода, а n – изменение вдоль радиуса. Значения нескольких первых корней ν_{mn} при $m = 0,1,2$ приведены в табл. 2.2.

Таблица 2.2

Корни производных функций Бесселя

Номер корня	m = 0	m = 1	m = 2
n = 1	3,832	1,840	3,054
n = 2	7,016	5,335	6,705
n = 3	10,174	8,536	9,965

Из выражения (2.49) следует, что

$$k_{кр}a = \nu_{mn}, \qquad (2.50)$$

где $k_{кр} = 2\pi/\lambda_{кр}$ – критическое волновое число. Тогда критическую длину волны для пустотелого круглого волновода с волнами типа Н(ТЕ) будем определять по формуле

$$\lambda_{кр} = \frac{2\pi a}{\nu_{mn}}, \qquad (2.51)$$

а для волновода с волной H_{11}

$$\left(\lambda_{кр}\right)_{11} = \frac{2\pi a}{1{,}84}. \qquad (2.52)$$

Подставляя в (2.52) значение $\lambda_{кр} = 4{,}03$ см, получаем

$$D = 2a = \frac{1{,}84\left(\lambda_{кр}\right)_{11}}{\pi} = \frac{1{,}84 \cdot 4{,}03}{\pi} = 2{,}36 \text{ см}.$$

2.30. Определить длину волны, волновое сопротивление и коэффициент затухания в медном ($\sigma = 5{,}8 \cdot 10^7$ См/м) круглом волноводе с внутренним диаметром D = 25,4 мм при распространении в нем волны типа E_{01} с длиной волны в свободном пространстве $\lambda = 3$ см[4].

Р е ш е н и е. Критическую длину волн типа ТМ(Е) в круглых волноводах находят из граничного условия

$$E_т\big|_{\rho=a} = E_z\big|_{\rho=a} = 0 \;\Rightarrow\; J_m(k_{кр}a) = J_m(æ_{mn}) = 0, \qquad (2.53)$$

где $æ_{mn}$ – корни функций Бесселя m-го порядка, т.е. числа, которые определяют структуру поля в плоскости поперечного сечения волновода: m характеризует изменение поля по окружности волновода, а n – по радиусу. Значения первых корней при m = 0, 1, 2 приведены в табл. 2.3.

Таблица 2.3

Корни функций Бесселя

Номер корня	m = 0	m = 1	m = 2
n = 1	2,405	3,832	5,135
n = 2	5,520	7,016	8,417
n = 3	8,654	10,173	11,620

Из выражения (2.53) видно, что

$$k_{кр}a = æ_{mn},$$

откуда для пустотелого круглого волновода

$$\lambda_{кр} = \frac{2\pi a}{æ_{mn}} = \frac{\pi D}{æ_{mn}}. \qquad (2.54)$$

Тогда длину волны в волноводе определяем по выражению

$$\lambda_в = \frac{\lambda}{\sqrt{1-(\lambda\, æ_{mn}/\pi D)^2}},$$

для волны E_{01}

$$\lambda_в = \frac{\lambda}{\sqrt{1-(\lambda\, æ_{01}/\pi D)^2}} = \frac{3}{\sqrt{1-(3\cdot 2{,}405/\pi\cdot 2{,}54)^2}} = 7{,}02 \text{ см}.$$

Волновое сопротивление волновода с волной E_{01}

$$W_в = W_0\sqrt{1-\left(\frac{\lambda\, æ_{01}}{\pi D}\right)^2} = 377\cdot\sqrt{1-\left(\frac{3\cdot 2{,}405}{\pi\cdot 2{,}54}\right)^2} = 161 \text{ Ом}.$$

Коэффициент затухания в волноводе с волной E_{01} находим так:

$$\alpha = \frac{1{,}586}{D\sqrt{\sigma\lambda}\sqrt{1-\left(\frac{\lambda\,æ_{01}}{\pi D}\right)^2}} \text{ дБ/м,}$$

и он равен

$$\alpha = \frac{1{,}586}{0{,}0254\sqrt{5{,}8\cdot 10^7\cdot 0{,}03}\sqrt{1-\left(\frac{0{,}03\cdot 2{,}405}{3{,}14\cdot 0{,}0254}\right)^2}} = 0{,}11 \text{ дБ/м.}$$

Задачи для самостоятельного решения

2.1. Линия длиной $\ell = 15$ м с волновым сопротивлением $W = 500$ Ом замкнута на комплексное сопротивление $Z_н = 100 + i300$ Ом при длине волны в линии $\lambda = 100$ м. Определить входное сопротивление и входную проводимость линии.

2.2. Определить входную проводимость линии без потерь длиной $\ell = 0{,}12\lambda$, которая имеет волновое сопротивление $W = 120$ Ом и нагружена на сопротивление $Z_н = 50 + i150$ Ом.

2.3. Найти входное сопротивление и входную проводимость короткозамкнутой линии без потерь длиной $\ell = 0{,}09\lambda$, имеющей волновое сопротивление $W = 50$ Ом.

2.4. Широкополосный трансформатор состоит из двух четверть-волновых отрезков с волновыми сопротивлениями $W_{c1} = 52$ Ом и $W_{c2} = 65$ Ом. Чему равны волновые сопротивления согласуемых линий?

2.5. Рассчитать экспоненциальный трансформатор, предназначенный для согласования антенны с активным входным сопротивлением $R_A = 200$ Ом и фидера с волновым сопротивлением $W = 150$ Ом. Фидер выполнен из двух медных проводов диаметром $2r = 1{,}5$ мм. Допустимый КСВ $k_{св} = 1{,}05$ на волне $\lambda_{max} = 10$ м.

2.6. Определить мощность, передаваемую по плоскопараллельному волноводу, состоящему из двух медных параллельных полос шириной $b = 5$ см, разделенных диэлектриком с относительными значениями проницаемостей $\varepsilon = 4$, $\mu = 1$. Толщина диэлектрика a = 8 мм. Амплитуда напряженности электрического поля $E_0 = 10^5$ В/м, частота f = 25 ГГц. Влиянием краев полосок и потерями мощности в диэлектрике пренебречь.

Найти потери мощности в медных полосах на 1 м длины линии. Расчет выполнить для всех типов волн ТЕ(Н), которые могут распространяться в линии в направлении оси z.

2.7. Найти размеры поперечного сечения a_c, b_c и длину ℓ_c ступенчатого трансформатора, согласующего два отрезка прямоугольного волновода, один из которых имеет размеры $a_1 = 5{,}69$ мм, $b_1 = 2{,}845$ мм (МЭК-400), а другой - $a_2 = 7{,}112$ мм, $b_2 = 2{,}845$ мм.

По первому волноводу проходит волна типа H_{10} с частотой f = 40 ГГц.

2.8. Найти размеры поперечного сечения a_c, b_c и длину ℓ_c ступенчатого трансформатора, согласующего отрезки двух стандартных волноводов: МЭК-58 с размерами $a_1 \times b_1 = 40{,}39 \times 20{,}19$ мм и МЭК-48 с размерами $a_2 \times b_2 = 47{,}55 \times 22{,}15$ мм.

По первому волноводу проходит волна типа H_{10} с частотой f = 5,8 ГГц.

2.9. Установить размеры поперечных сечений a_{c1}, b_{c1} и a_{c2}, b_{c2}, а также длины ℓ_{c1} и ℓ_{c2} ступенек широкополосного двухступенчатого трансформатора, согласующего два отрезка прямоугольного волновода, один из которых имеет размеры $a_1 \times b_1 = 10{,}67 \times 5{,}32$ мм (МЭК-220), а другой - $a_2 = 15{,}8$ мм, $b_2 = b_1 = 5{,}32$ мм.

По первому волноводу проходит волна типа H_{10} с частотой f = 22 ГГц.

2.10. Определить размеры поперечных сечений a_{c1}, b_{c1} и a_{c2}, b_{c2}, а также длины ℓ_{c1}, ℓ_{c2} ступенек четвертьволнового широкополосного трансформатора, согласующего отрезки волноводов МЭК-260 с размерами $a_1 \times b_1 = 8{,}64 \times 4{,}32$ мм и МЭК-180 с размерами $a_2 \times b_2 = 12{,}95 \times 6{,}48$ мм.

По первому волноводу проходит волна типа H_{10} с частотой $f = 26$ ГГц.

2.11. Изменение фазы волны типа H_{10} в прямоугольном волноводе сечением $a \times b = 28{,}5 \times 12{,}6$ мм на расстоянии $\ell = 3$ см составляет $\Delta\psi = 135^{\circ}$. Определить частоту волны.

2.12. В прямоугольном волноводе сечением $a \times b = 46 \times 10$ мм распространяются волны H_{10} и H_{20} одинаковой частоты f = 9375 МГц. Найти расстояние, на котором фазовый сдвиг между этими волнами изменится на величину $\Delta\psi = \pi / 2$.

2.13. Длина волны H_{10} в прямоугольном волноводе сечением $a_1 \times b_1 = 72 \times 34$ мм вдвое короче, чем в волноводе сечением $a_2 \times b_2 = 58 \times 25$ мм. Определить частоту генератора.

2.14. Волновое сопротивление прямоугольного волновода с воздушным заполнением для волны H_{11} на некоторой частоте $W_H = 600$ Ом.

Определить волновое сопротивление этого волновода на той же частоте для волны E_{11}.

2.15. Длина волны типа H_{10} в прямоугольном волноводе при работе возбуждающего генератора на волне $\lambda = 10$ см вчетверо короче, чем при работе генератора на волне $\lambda = 20$ см. Найти ширину волновода.

2.16. Прямоугольный волновод сечением $a \times b = 28{,}5 \times 12{,}6$ мм полностью заполнен полистиролом ($\varepsilon = 2{,}5$, $\sigma_д = 10^{-4}$ См/м). Частота генератора f = 4,75 ГГц. Амплитуда напряженности электрического поля в середине широкой стенки волновода на входе E_0 = 10 КВ/м. Определить постоянную затухания линии, среднюю передаваемую мощность на входе и среднюю мощность потерь линии длиной $\ell = 0{,}5$ м.

2.17. Квадратный волновод сечением 5×5 см работает на частоте f = 6 Гц. Диэлектрик – воздух. Сравнить между собой постоянные затухания волновода, если энергия передается на волнах H_{10} и E_{11}.

2.18. Круглый волновод радиусом a = 5,5 см заполнен кварцем ($\varepsilon = 3{,}8, \sigma = 0$). Определить типы волн, которые могут распространяться в волноводе, и волновые сопротивления волновода в каждом случае, если частота f = 6 ГГц.

2.19. Средняя мощность, передаваемая по коаксиальной линии, заполненной фторопластом-4 ($\varepsilon = 2{,}1$, $\mathrm{tg}\Delta = 4 \cdot 10^{-4}$), составляет $P_{ср}$ = 500 Вт.

Радиус внешнего проводника R_2 = 3 мм. Волновое сопротивление линии W = 50 Ом. Найти среднюю мощность потерь в линии длиной $\ell = 10$ м, если длина волны $\lambda = 15$ см, а материал проводников – медь ($\sigma_м = 5{,}7 \cdot 10^7$ См/м).

2.20. Проводники коаксиальной линии с воздушным заполнением изготовлены из меди ($\sigma_м = 5{,}7 \cdot 10^7$ См/м). Частота волны f = 1 ГГц. Радиус внешнего проводника R_2 = 5 мм. Определить постоянную затухания для различных значений внутреннего проводника: R_1 = 0,2; 1; 2,2; 3,5; 4,7 мм. Найти волновое сопротивление линии для каждого из значений R_1 и объяснить зависимость постоянной затухания от волнового сопротивления.

3. ФАЗИРУЮЩИЕ И ПОЛЯРИЗУЮЩИЕ УСТРОЙСТВА

3.1. В круглом волноводе с волной H_{11} имеется металлическая вставка длиной ℓ. Ориентация вставки относительно структуры поля распространяющейся волны показана на рис. 2.18. Толщина вставки d = 3 мм, радиус волновода a = 2 см, частота волны f = 5,5 ГГц. Определить длину вставки для получения круговой поляризации волны H_{11} [3].

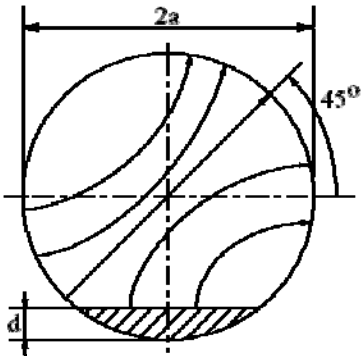


Рис. 2.18

Р е ш е н и е. Найдем сначала длину волны в свободном пространстве

$$\lambda = \frac{c}{f} = \frac{3 \cdot 10^8}{5{,}5 \cdot 10^9} = 5{,}45 \text{ см.}$$

Исходную волну H_{11} можно представить в виде суммы двух взаимно ортогональных волн H_{11}. Одна из этих волн (назовем ее H_{11}^x) имеет ориентацию максимума электрического поля параллельно оси x, а вторая H_{11}^y - параллельно оси y.

Для волны H_{11}^x вставка находится в минимуме напряженности электрического поля (выполняется граничное условие $E_x\big|_{\text{на вст}} = 0$), поэтому она не оказывает влияния на распространение этой волны. Критическая длина волны H_{11}^x (см. (2.51))

$$\lambda_{x\,\text{кр}} = \frac{2\pi a}{\nu_{11}} = \frac{2\pi \cdot 2}{1{,}84} = 6{,}83 \text{ см.}$$

Для волны H_{11}^y вставка расположена в максимуме электрического поля и как бы уменьшает радиус волновода до величины

$$a' = a - d/2 = 2 - 0{,}3/2 = 1{,}85 \text{ см,}$$

поэтому критическая длина волны H_{11}^y

$$\lambda_{y\,\text{кр}} = \frac{2\pi a'}{1{,}84} = \frac{2\pi \cdot 1{,}85}{1{,}84} = 6{,}317 \text{ см.}$$

Следовательно, волны H_{11}^x и H_{11}^y имеют различные фазовые постоянные (продольные волновые числа)

$$\beta_x = \frac{2\pi}{\lambda_x}, \quad \beta_y = \frac{2\pi}{\lambda_y},$$

где λ_x и λ_y – длины волн H_{11}^x и H_{11}^y:

$$\lambda_x = \frac{\lambda}{\sqrt{1-(\lambda/\lambda_{x\,кр})^2}} = \frac{5{,}45}{\sqrt{1-(5{,}45/6{,}83)^2}} = 9{,}04 \text{ см},$$

$$\lambda_y = \frac{\lambda}{\sqrt{1-(\lambda/\lambda_{y\,кр})^2}} = \frac{5{,}45}{\sqrt{1-(5{,}45/6{,}317)^2}} = 10{,}76 \text{ см}.$$

На некотором отрезке $z = \ell$ между этими волнами возникнет фазовый сдвиг

$$\Delta\psi = (\beta_x - \beta_y)\ell = \left(\frac{2\pi}{\lambda_x} - \frac{2\pi}{\lambda_y}\right)\ell,$$

поэтому сумма волн H_{11}^x и H_{11}^y в общем случае даст волну H_{11} эллиптической поляризации.

Для получения круговой поляризации равенство амплитуд волн H_{11}^x и H_{11}^y достигается расположением вставки под углом 45° к силовым линиям электрического поля исходной волны. Кроме того, для получения круговой поляризации необходимо, чтобы фазовый сдвиг был равен $\Delta\psi = \pi/2$, т.е.

$$\left(\frac{2\pi}{\lambda_x} - \frac{2\pi}{\lambda_y}\right)\ell = \frac{\pi}{2},$$

откуда

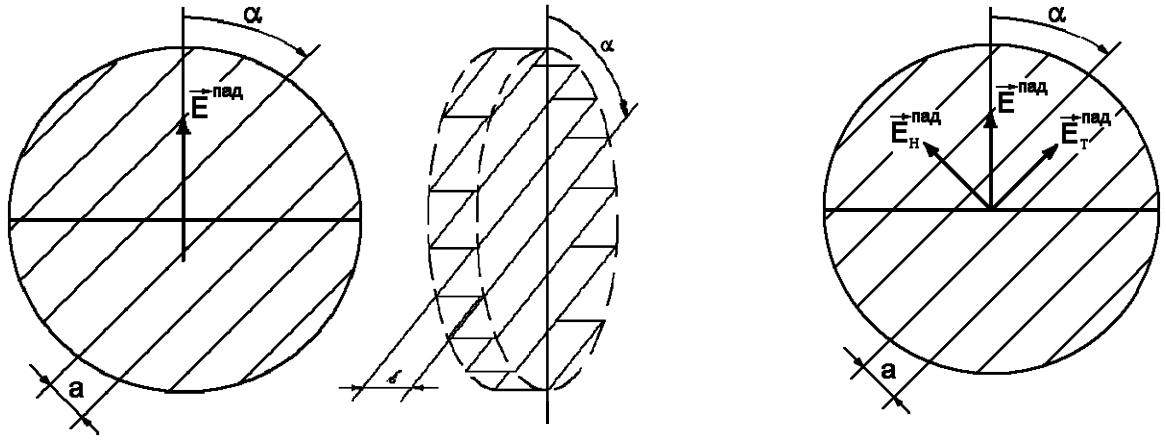
$$\ell = \frac{\lambda_x \lambda_y}{4(\lambda_y - \lambda_x)}. \qquad (3.1)$$

Подставив в это выражение найденные выше длины волн, получим, что длина вставки

$$\ell = \frac{9{,}04 \cdot 10{,}76}{4(10{,}76 - 9{,}04)} = 14{,}1 \text{ см}.$$

3.2. В раскрыве параболоида вращения установлена решетка из плоскопараллельных металлических пластин, плоскость поляризации которых составляет угол $\alpha = 45^o$ с плоскостью поляризации облучателя (рис. 3.1, а) [6].

Определить ширину пластин ℓ, при которой обеспечивается получение вращающейся поляризации, если расстояние между пластинами $a = 0{,}75\lambda$, а длина волны $\lambda = 3$ см. Что произойдет, если $\alpha = 0^o$?



а б

Рис. 3.1

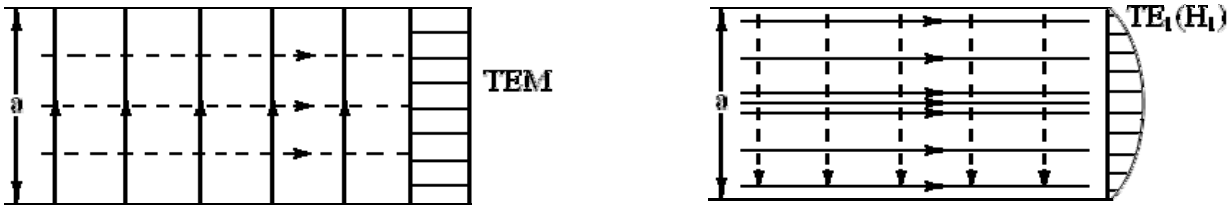
Р е ш е н и е. Разложим вектор напряженности электрического поля падающей от облучателя волны $E^{пад}$ на две составляющие, одна из которых $E_н^{пад}$ нормальна к пластинам , а вторая $E_т^{пад}$ - параллельна им (рис. 3.1, б).

Электромагнитное поле с составляющей $E_н^{пад}$ – это поле волны ТЕМ в плоскопараллельном волноводе (рис. 3.2, а), для которого [7]

$$v_ф = c, \quad \lambda_в = \lambda, \quad \beta = k = 2\pi/\lambda.$$

Тогда набег по фазе для этой составляющей при распространении от плоскости решетки к зеркалу и от зеркала к плоскости решетки составит

$$\psi_Н = \frac{2\pi}{\lambda}\ell\Big|_{к.зерк} + \frac{2\pi}{\lambda}\ell\Big|_{к.реш} = \frac{4\pi\ell}{\lambda}.$$



а б

Рис. 3.2

Для электромагнитного поля с составляющей $E_т^{пад}$ пластины представляют собой систему плоских волноводов, в каждом из которых распространяется волна $TE_1(H_1)$:

$$v_ф > c, \quad \beta = 2\pi/\lambda_т, \quad \lambda_т > \lambda,$$

причем

$$\lambda_т = \frac{\lambda}{\sqrt{1-(\lambda/2a)^2}}. \qquad (3.2)$$

Тогда набег по фазе для этой составляющей при распространении от плоскости решетки к зеркалу и от зеркала к плоскости решетки составит

$$\psi_{\text{т}} = \frac{2\pi}{\lambda_{\text{т}}}\ell\Big|_{\text{к.зерк}} + \frac{2\pi}{\lambda_{\text{т}}}\ell\Big|_{\text{к.реш}} = \frac{4\pi\ell}{\lambda_{\text{т}}}.$$

В результате сдвиг по фазе между составляющими $E_{\text{н}}^{\text{отр}}$ и $E_{\text{т}}^{\text{отр}}$

$$\Delta\psi = \psi_{\text{н}} - \psi_{\text{т}} = 4\pi\ell\left(\frac{1}{\lambda} - \frac{1}{\lambda_{\text{т}}}\right) = 4\pi\ell\,\frac{(\lambda_{\text{т}} - \lambda)}{\lambda_{\text{т}}\lambda}.$$

Для обеспечения поля круговой поляризации необходимо, чтобы $\Delta\psi = \pi/2$, тогда ширина пластин

$$\ell = \frac{1}{8}\frac{\lambda_{\text{т}}\lambda}{\lambda_{\text{т}} - \lambda}. \qquad (3.3)$$

Из выражения (3.2) найдем

$$\lambda_{\text{т}} = \frac{3}{\sqrt{1 - (3/2\cdot 0{,}75\cdot 3)^2}} = 4{,}025 \text{ см},$$

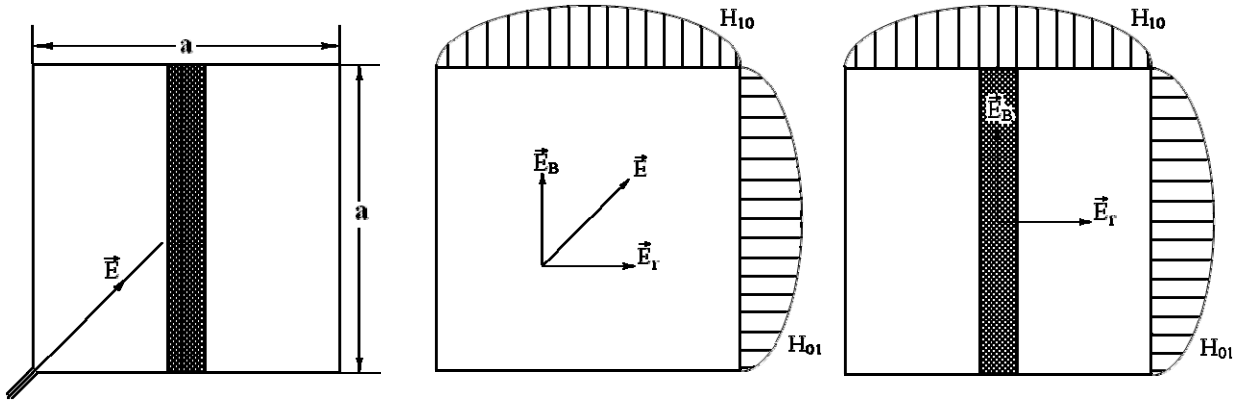
а из (3.3) –

$$\ell = \frac{4{,}025\cdot 3}{8(4{,}025 - 3)} \approx 1{,}5 \text{ см}.$$

Поле останется круглополяризованным, если $\Delta\psi = (2n+1)\pi/2$, где $n = 1, 2, 3, \ldots$, поэтому в тех случаях, когда малую ширину ℓ выполнять неудобно, ее можно увеличить. Например, при $n = 1$ $\ell \approx 4{,}5$ см.

При $\alpha = 0^{\circ}$ $E^{\text{пад}} = E_{\text{т}}^{\text{пад}}$ и между пластинами распространяется волна $TE_1(H_1)$ с вертикальным вектором электрического поля, а значит, и с вертикальной поляризацией. Такую же поляризацию имеет и поле, отраженное от системы пластин.

3.3. Определить длину фазирующей секции для создания кругло-поляризованного поля, состоящую из участка волновода квадратного сечения, вдоль которого вставлена диэлектрическая пластинка, перпендикулярная горизонтальным сторонам волновода (рис. 3.3). Размер стороны поперечного сечения квадратного волновода а = 18,4 мм, диэлектрическая пластинка изготовлена из полистирола ($\varepsilon = 2{,}45$), длина волны $\lambda = 3{,}2$ см. Возбуждение волновода осуществляется посредством наклонного штыря [6].



а б в

Рис. 3.3

Р е ш е н и е. При ориентации возбуждающего устройства (центрального проводника коаксиальной линии) вдоль диагонали поперечного сечения квадратного волновода (см. рис. 3.3, а) вектор $\vec{E}$ напряженности электрического поля наклонен к стенкам волновода под углами 45° и его горизонтальная $E_г$ и вертикальная $E_в$ составляющие равны по величине (см. рис. 3.3, б), причем составляющая $E_в$ возбудит в волноводе волну H_{10}, а составляющая $E_г$ – волну H_{01}. Эти волны имеют одинаковые критические частоты и одинаковые фазовые скорости и длины волн в волноводе:

$$\left(v_ф\right)_{10} = \left(v_ф\right)_{01} = \frac{c}{\sqrt{1-(\lambda\lambda 2\,a)^2}}, \quad \left(\lambda_в\right)_{10} = \left(\lambda_в\right)_{01} = \frac{\lambda}{\sqrt{1-(\lambda\lambda 2\,a)^2}}.$$

Наличие же диэлектрической пластинки в месте пучности электрического поля волны H_{10} (см. рис. 3.3,в) приводит к уменьшению фазовой скорости и длины этой волны примерно в $\sqrt{\varepsilon}$ раз:

$$\left(v_{ф\,д}\right)_{10} = \frac{\left(v_ф\right)_{10}}{\sqrt{\varepsilon}} = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon}\sqrt{1-(\lambda\lambda 2\,a)^2}}, \quad \left(\lambda_{в\,д}\right)_{10} = \frac{\left(\lambda_в\right)_{10}}{\sqrt{\varepsilon}} = \frac{\lambda}{\sqrt{\varepsilon}\sqrt{1-(\lambda\lambda 2\,a)^2}},$$

причем, чем большую площадь поперечного сечения волновода пластинка занимает, тем точнее будут выполняться эти соотношения. На параметры волны H_{01} пластинка не влияет.

Если в момент возбуждения волны H_{10} и H_{01} были синфазны, то по мере увеличения проходимого ими расстояния сдвиг по фазе между ними увеличивается: волна H_{10} будет все больше отставать по фазе от волны H_{01}. При прохождении расстояния ℓ этот сдвиг

$$\Delta\psi = \left(\frac{2\pi}{(\lambda_{вд})_{10}} - \frac{2\pi}{(\lambda_{в})_{01}} \right)\ell. \qquad (3.4)$$

Для создания поля круговой поляризации при равных амплитудах $E_в$ и $E_г$ сдвиг по фазе между ними должен составлять $\Delta\psi = \pi/2$. Тогда из формулы (3.4)

$$\ell = \frac{(\lambda_{в})_{01}(\lambda_{вд})_{10}}{4[(\lambda_{в})_{01} - (\lambda_{вд})_{10}]}. \qquad (3.5)$$

Найдем длины волн H_{01} и H_{10}:

$$(\lambda_{в})_{01} = \frac{3{,}2}{\sqrt{1-(3{,}2/2\cdot 1{,}84)^2}} = 6{,}48 \text{ см},$$

$$(\lambda_{вд})_{10} = \frac{(\lambda_{в})_{01}}{\sqrt{\varepsilon}} = \frac{6{,}48}{\sqrt{2{,}45}} = 4{,}14 \text{ см}.$$

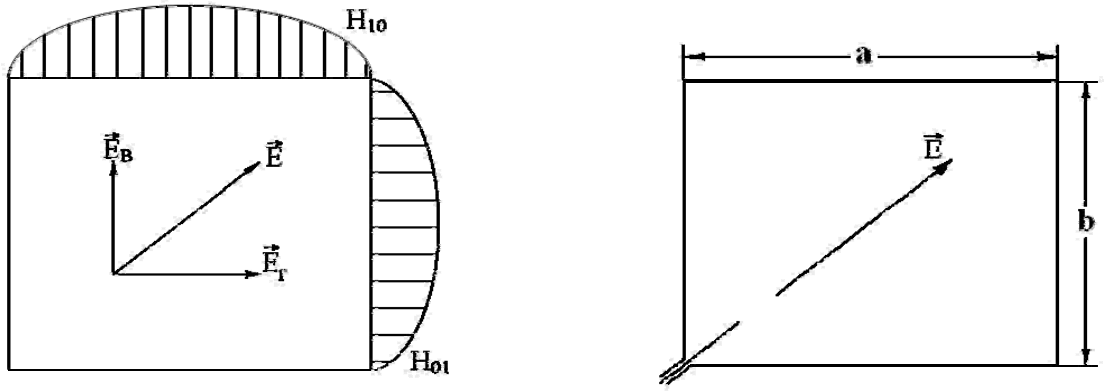
Подставим эти значения в выражение (3.5):

$$\ell = \frac{6{,}48\cdot 4{,}14}{4(6{,}48-4{,}14)} = 2{,}9 \text{ см}.$$

3.4. Антенна РЛС с вращающейся поляризацией представляет собой параболоид вращения с волноводным облучателем квадратного сечения. Для получения вращающегося поля в волноводный тракт включена расщепляющая и фазирующая секции в виде отрезка прямоугольного волновода, размеры поперечного сечения которого a = 20 мм, b = 18 мм. Возбуждение фазирующей секции осуществляется посредством наклонного штыря, расположенного вдоль диагонали поперечного сечения волновода (рис. 3.4).

Определить длину фазирующей секции, обеспечивающую сдвиг по фазе волн H_{10} и H_{01} на $\pi/2$ на ее выходе, если длина волны $\lambda = 3$ см [6].

Р е ш е н и е. При ориентации возбуждающего устройства (центрального проводника коаксиальной линии) вдоль диагонали прямоугольного волновода (рис. 3.4, а) вектор $\vec{E}$ напряженности электрического поля наклонен к стенкам волновода под разными углами и его составляющие $E_в$ и $E_г$ имеют разную величину, причем составляющая $E_в$ возбуждает в волноводе волну E_{10}, а составляющая $E_г$ – волну H_{01} (рис. 3.4, б).



а б

Рис. 3.4

Известно [7], что если составляющие имеют разную величину, но сдвиг по фазе между ними равен $\Delta\psi = \pi/2$, поляризация будет эллиптической, причем поляризационный эллипс ориентирован большей полуосью вдоль большей составляющей, т.е. вдоль широкой стенки прямоугольного волновода.

Набег по фазе на длине фазирующей секции для волн H_{10} и H_{01} составит:

- для волны H_{10}

$$\psi_{10} = \frac{2\pi}{\lambda_{10}}\ell = \frac{2\pi\ell}{\lambda}\sqrt{1-\left(\frac{\lambda}{2a}\right)^2},$$

- для волны H_{01}

$$\psi_{01} = \frac{2\pi}{\lambda_{01}}\ell = \frac{2\pi\ell}{\lambda}\sqrt{1-\left(\frac{\lambda}{2b}\right)^2},$$

где λ_{10} и λ_{01} - длины волн H_{10} и H_{01} в волноводе.

Определяя сдвиг по фазе между волнами

$$\Delta\psi = \psi_{10} - \psi_{01} = \frac{2\pi\ell}{\lambda}\left\{\sqrt{1-\left(\frac{\lambda}{2a}\right)^2} - \sqrt{1-\left(\frac{\lambda}{2b}\right)^2}\right\}$$

и приравнивая его к $\Delta\psi = \pi/2$, найдем длину фазирующей секции

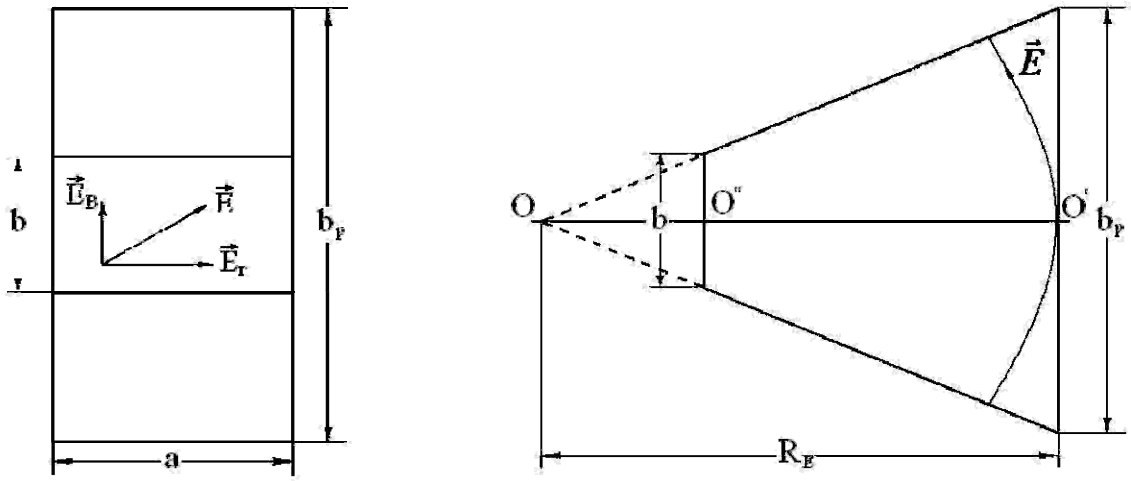
$$\ell = \frac{\lambda}{4\{\sqrt{1-(\lambda\lambda 2a)^2} - \sqrt{1-(\lambda\lambda 2b)^2}\}},$$

или

$$\ell = \frac{3}{4\{\sqrt{1-(3/4)^2} - \sqrt{1-(3/3{,}6)^2}\}} = 6{,}9 \text{ см}.$$

3.5. Рассчитать сдвиг по фазе между взаимно перпендикулярными составляющими E_x и E_y, возникающий при распространении внутри

секториального рупора, питаемого прямоугольным волноводом, который возбуждается посредством наклонного штыря. Сечение прямоугольного волновода $a \times b = 25{,}5 \times 20$ мм, постоянный размер поперечного сечения равен большей стороне волновода (рис. 3.5, а). Ширина диаграммы направленности (ДН) рупора по половине мощности в плоскости, параллельной большему размеру раскрыва, $2\theta^{o}_{0,5} = 30^{o}$, длина волны $\lambda = 3$ см. Искажения фазы на краю раскрыва не превосходят $\pi/2$ [6].



а б

Рис. 3.5

Р е ш е н и е. Из условия относительно фазовых искажений на краю раскрыва следует, что рупор имеет оптимальные размеры, для которых выполняются соотношения

$$2\theta^{o}_{0,5} \approx 53^{o}\,\frac{\lambda}{b_p}, \qquad (3.6)$$

$$R_E \approx \frac{b_p^2}{2\lambda}, \qquad (3.7)$$

где b_p – размер раскрыва Е-секториального рупора в плоскости Е,

R_E – длина рупора в этой плоскости (рис. 3.5, б).

Из выражения (3.6) находим

$$b_p = \frac{53^{o}\lambda}{2\theta^{o}_{0,5}} = \frac{53^{o}\cdot 3}{30^{o}} = 5{,}3 \text{ см},$$

а из (3.7)

$$R_E = \frac{5{,}3^2}{2\cdot 3} = 4{,}7 \text{ см}.$$

В горловине рупора (месте соединения с волноводом) составляющие $E_в$ и $E_г$, на которые раскладывается вектор $\vec{E}$ возбужденного наклонным

штырем поля, синфазны. Фаза волны H_{10}, возбужденной составляющей $E_в$, в рупоре остается такой же, как и в волноводе, а фаза волны H_{01}, возбужденной составляющей $E_г$, меняется с увеличением длины рупора. Тогда сдвиг по фазе между составляющими $E_в$ и $E_г$ в раскрыве рупора будет определяться набегом по фазе для составляющей $E_г$ от начала рупора (горловины) до раскрыва (см. рис. 3.5, б):

$$\Delta\psi = \frac{2\pi}{\lambda_{в2}} OO' - \frac{2\pi}{\lambda_{в1}} OO'' = \frac{2\pi}{\lambda_{в2}} R_E - \frac{2\pi}{\lambda_{в1}} OO'',$$

где

$$\lambda_{в1} = \frac{\lambda}{\sqrt{1-(\lambda\lambda 2\,b)^2}}, \qquad \lambda_{в2} = \frac{\lambda}{\sqrt{1-(\lambda\lambda 2\,b_р)^2}}.$$

Из подобия треугольников $OO'M$ и $OO''N$ следует, что

$$\frac{b_р/2}{OO'} = \frac{b/2}{OO''} \;\Rightarrow\; OO'' = \frac{bOO'}{b_р} = \frac{bR_E}{b_р}.$$

Тогда

$$\Delta\psi = \frac{2\pi}{\lambda_{в1}} R_E - \frac{2\pi}{\lambda_{в2}} \frac{bR_E}{b_р}. \qquad (3.8)$$

Найдем длины волн в начале рупора и в его раскрыве:

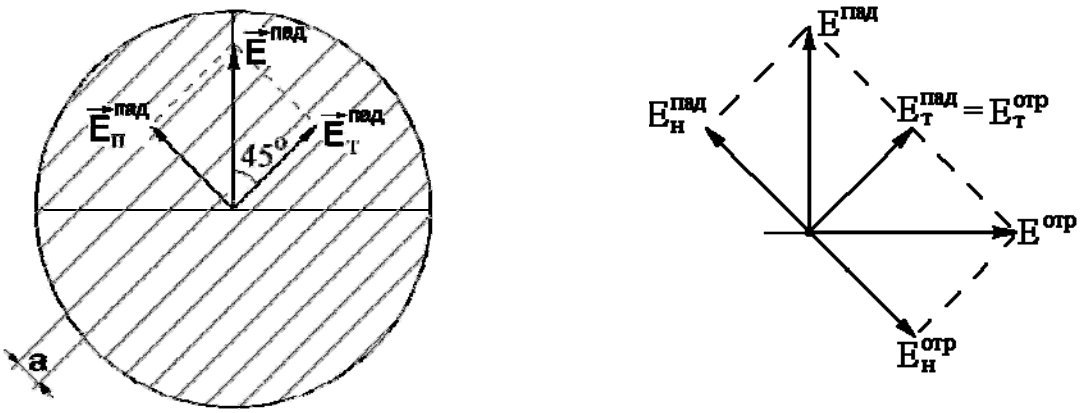
$$\lambda_{в1} = \frac{3}{\sqrt{1-(3/2\cdot 2)^2}} = 4{,}53 \text{ см},$$

$$\lambda_{в2} = \frac{3}{\sqrt{1-(3/2\cdot 5{,}3)^2}} = 3{,}13 \text{ см}.$$

Подставив все данные в (3.8), окончательно получим

$$\Delta\psi = 2\pi R_E \frac{\lambda_{в2} b_р - \lambda_{в1} b}{\lambda_{в1}\lambda_{в2} b_р} = 2\pi\cdot 4{,}7 \frac{3{,}13\cdot 5{,}3 - 4{,}53\cdot 2}{3{,}13\cdot 4{,}53\cdot 5{,}3} = 0{,}94\pi.$$

3.6. На поверхности параболоида вращения установлена система металлических пластин под углом 45° к вектору $\vec{E}$ вертикально-поляризованного поля, создаваемого облучателем (рис. 3.6, а). Расстояние между пластинами $a = \lambda/10$, ширина (глубина) пластин $\ell = \lambda/4$. Как будет поляризована отраженная от зеркала волна [6]?



а б

Рис. 3.6

Р е ш е н и е. Разложим вектор $\vec{E}^{пад}$ на две составляющие: $\vec{E}_т^{пад}$, параллельную пластинам, и $\vec{E}_н^{пад}$, нормальную к ним. Составляющая $\vec{E}_т^{пад}$ отразится от пластин, так как между ними она распространяться не может из-за малого расстояния между пластинами ($a << \lambda$). Тогда составляющая $\vec{E}_т^{отр}$ будет ориентирована так же, как и $\vec{E}_т^{пад}$ (естественный поворот на π при отражении от пластин и зеркала не учитываем). Составляющая $\vec{E}_н^{пад}$ отразится только от поверхности зеркала, так как пластины влияния на нее не оказывают (как на волну ТЕМ с вектором $\vec{E}$, перпендикулярным к пластинам). В результате двойного прохождения пути $\lambda/4$ (ширины пластин) для фазы составляющей $\vec{E}_н^{отр}$

$$\psi_н = \frac{2\pi}{\lambda}\frac{\lambda}{4}\bigg|_{к.зерк} + \frac{2\pi}{\lambda}\frac{\lambda}{4}\bigg|_{к.пласт} = \pi,$$

т.е. составляющая $\vec{E}_н^{отр}$ по отношению к составляющей $\vec{E}_н^{пад}$ сдвинута по фазе на 180° (см. рис. 3.6, б). После сложения с $\vec{E}_т^{отр}$ она даст результирующий вектор $\vec{E}^{отр}$, повернутый относительно вектора $\vec{E}^{пад}$ на 90°. Такие устройства широко используют в зеркальных антеннах для устранения реакции зеркал на диаграмму направленности облучателя, они называются ***твистрефлекторами.***

3.7. На расстоянии $\lambda/8$ параллельно плоской металлической пластинке установлена решетка, состоящая из тонких параллельных друг другу металлических стержней, расстояния между которыми порядка $\lambda/10$. На пластинку падает линейно поляризованная волна, плоскость поляризации составляет угол 45° с направлением стержней. Как будет поляризована отраженная волна [6]?

Р е ш е н и е. Разложим вектор $\vec{E}^{пад}$ на две составляющие: $\vec{E}_{т}^{пад}$ – тангенциальную стержням и $\vec{E}_{н}^{пад}$ – нормальную к ним (рис. 3.7, а). Поскольку угол α между направлением вектора $\vec{E}^{пад}$ и осями стержней равен 45°, то

$$\left|\vec{E}_{т}^{пад}\right| = \left|\vec{E}_{н}^{пад}\right|.$$

Составляющая $\vec{E}_{т}^{пад}$ отразится непосредственно от системы стержней, так как она для него запредельна ($a << \lambda$). Не учитывая естественного поворота на π при отражении от металлической поверхности системы, считаем, что ориентация $\vec{E}_{т}^{отр}$ остается такой же, как и для $\vec{E}_{т}^{пад}$.

Нормальная составляющая пройдет сквозь стержни как волна ТЕМ между плоскопараллельными плоскостями (без изменения фазовой скорости и длины волны), отразится от поверхности металлической пластинки и вернется к системе стержней, запоздав по фазе на угол

$$\psi_{н} = \frac{2\pi}{\lambda}\frac{\lambda}{8}\bigg|_{к.пласт} + \frac{2\pi}{\lambda}\frac{\lambda}{8}\bigg|_{к.сист} = \frac{\pi}{2}.$$

Не учитывая естественного поворота по фазе на π при отражении от пластинки, получаем, что ориентация в пространстве у $\vec{E}_{н}^{отр}$ останется такой же, как для $\vec{E}_{н}^{пад}$, но $\vec{E}_{н}^{отр}$ будет отставать по фазе от $\vec{E}_{н}^{пад}$ на $\pi/2$:

$$\vec{E}_{н}^{отр} = \vec{E}_{н}^{пад} e^{-i\frac{\pi}{2}}.$$

Поскольку $\vec{E}_{н}^{пад}$ и $\vec{E}_{т}^{пад}$ синфазны, последнее выражение можно записать как

$$\vec{E}_{н}^{отр} = \vec{E}_{т}^{пад} e^{-i\frac{\pi}{2}} = \vec{E}_{т}^{отр} e^{-i\frac{\pi}{2}}.$$

Таким образом, для отраженной от системы стержней волны выполняются все условия образования поля круговой поляризации:

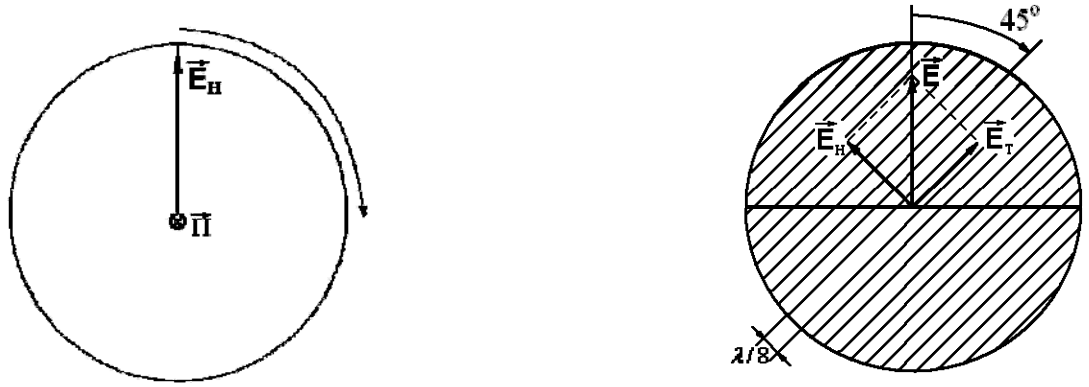
а) наличие двух составляющих одинаковой частоты $\vec{E}_{н}^{отр}$ и $\vec{E}_{т}^{отр}$;

б) их взаимная перпендикулярность;

в) равенство составляющих по величине;

г) сдвиг по фазе между ними на $\pi/2$.

Направление вращения вектора $\vec{E}^{отр}$ будет правым (рис. 3.7, б). Такие устройства называются ***ротарефлекторами***.



а б

Рис. 3.7

3.8. Из выражений (2.41) и (2.42), определяющих магнитное поле волны H_{10} в прямоугольном волноводе, видно, что компоненты H_x и H_z имеют сдвиг по фазе на $\pi/2$, так как различаются множителем $i = \exp(i\pi/2)$. Следовательно, в фиксированной точке при движении волны суммарный вектор $\vec{H}$ имеет эллиптическую магнитную поляризацию.

Определить расстояние от узкой стенки волновода, на котором вектор $\vec{H}$ будет вращаться по кругу, если сечение волновода $a \times b = 23 \times 10$ мм, а частота волны в свободном пространстве $f = 8{,}8$ ГГц [3].

Р е ш е н и е. Запишем выражения (2.41), (2.42):

$$H_x = -H_0 \frac{\lambda}{\lambda_в} \cos\left(\frac{\pi x}{a}\right) e^{-i\beta z}, \qquad (3.9)$$

$$H_z = -iH_0 \frac{\lambda}{\lambda_{кр}} \cos\left(\frac{\pi x}{a}\right) e^{-i\beta z}, \qquad (3.10)$$

в которых длина волны в свободном пространстве

$$\lambda = \frac{c}{f} = \frac{3 \cdot 10^8}{8{,}8 \cdot 10^9} = 3{,}41 \text{ см};$$

критическая длина волны H_{10}

$$\lambda_{кр} = 2a = 2 \cdot 2{,}3 = 4{,}6 \text{ см};$$

длина волны в волноводе

$$\lambda_в = \frac{\lambda}{\sqrt{1-(\lambda/\lambda_{кр})^2}} = \frac{3{,}41}{\sqrt{1-(3{,}41/4{,}6)^2}} = 5{,}08 \text{ см}.$$

Как видно из решения задачи (2.26), выражения для составляющих магнитного поля можно получить из второго уравнения Максвелла, если представить решение волнового уравнения для составляющей E_y в виде

$$E_y = E_0 \cos\left(\frac{\pi x}{a}\right) e^{-i\beta z}, \qquad (3.11)$$

где фазовая постоянная

$$\beta = \frac{2\pi}{\lambda_в} = \frac{2\pi}{5{,}08} = 0{,}394\pi \text{ рад/см.}$$

Для получения круговой поляризации, кроме сдвига по фазе на $\pi/2$, между двумя взаимно перпендикулярными составляющими необходимо выполнить равенство этих составляющих $|H_x| = |H_z|$, из которого и определяется расстояние x_1 от оси широкой стенки волновода к точке, где магнитное поле будет иметь круговую поляризацию:

$$H_0 \frac{\lambda}{\lambda_в} \cos\left(\frac{\pi x_1}{a}\right) = H_0 \frac{\lambda}{\lambda_{кр}} \sin\left(\frac{\pi x_1}{a}\right) \Rightarrow \operatorname{tg}\left(\frac{\pi x_1}{a}\right) = \frac{\lambda_{кр}}{\lambda_в}, \qquad (3.12)$$

откуда

$$x_1 = \frac{a}{\pi} \operatorname{arctg}\left(\frac{\lambda_{кр}}{\lambda_в}\right) \qquad (3.13)$$

или

$$x_1 = \frac{23}{\pi} \operatorname{arctg}\left(\frac{4{,}6}{5{,}08}\right) \approx 5{,}4 \text{ мм.}$$

Расстояние от узкой стенки составляет

$$d = \frac{a}{2} - x_1 = \frac{23}{2} - 5{,}4 \approx 6{,}1 \text{ мм.}$$

3.9. На широкой стенке волновода сечением $a \times b = 72 \times 34$ мм прорезана крестообразная щель, центр её находится на расстоянии $d = 18$ мм от узкой стенки. Найти частоту, на которой щель будет излучать поле круговой поляризации [3].

Р е ш е н и е. Найдем смещение щели относительно оси широкой стенки волновода:

$$x_1 = \frac{a}{2} - d = \frac{72}{2} - 18 = 18 \text{ мм.}$$

Из формулы (3.12) следует, что

$$\operatorname{tg}\left(\frac{\pi x_1}{a}\right) = \operatorname{tg}\left(\frac{18\pi}{72}\right) = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1,$$

а $$\lambda_{кр} = \lambda_в \operatorname{tg}\left(\frac{\pi x_1}{a}\right) \Rightarrow \lambda_{кр} = \frac{\lambda}{\sqrt{1-(\lambda/\lambda_{кр})^2}} \Rightarrow \lambda = \lambda_{кр}\sqrt{1-\left(\frac{\lambda}{\lambda_{кр}}\right)^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lambda = \sqrt{\lambda_{кр}^2 - \lambda^2} \Rightarrow \lambda^2 = \lambda_{кр}^2 - \lambda^2 \Rightarrow 2\lambda^2 = \lambda_{кр}^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \ \lambda^2 = \frac{\lambda_{кр}^2}{2} \ \Rightarrow \ \lambda = \frac{\lambda_{кр}}{\sqrt{2}} = \frac{2a}{\sqrt{2}} = \frac{2 \cdot 7{,}2}{\sqrt{2}} = 10{,}2 \text{ см.}$$

Тогда частота

$$f = \frac{c}{\lambda} = \frac{3 \cdot 10^8}{0{,}102} = 2{,}94 \text{ ГГц.}$$

Из таблиц [8] видно, что это волновод МЭК-32, работающий на средней длине волны $f = 3{,}2$ ГГц.

3.10. Для волновода МЭК-260 с размерами поперечного сечения $a \times b = 8{,}64 \times 4{,}32$ мм определить смещение относительно оси широкой стенки волновода местоположения точки, в которой магнитное поле имеет эллиптическую поляризацию с коэффициентом равномерности поляризационного эллипса $r = 0{,}5$, причем:

1) большая полуось эллипса ориентирована вдоль волновода;

2) большая полуось эллипса ориентирована вдоль широкой стенки волновода.

Р е ш е н и е. Найдем сначала длину волны в свободном пространстве

$$\lambda = \frac{c}{f} = \frac{3 \cdot 10^8}{26 \cdot 10^9} = 1{,}15 \text{ см}.$$

Критическая длина волны H_{10} в волноводе

$$\lambda_{кр} = 2a = 2 \cdot 8{,}64 = 1{,}728 \text{ см},$$

а длина волны H_{10} в волноводе

$$\lambda_в = \frac{\lambda}{\sqrt{1 - (\lambda\lambda/_{кр})^2}} = \frac{1{,}15}{\sqrt{1 - (1{,}15/1{,}728)^2}} = 1{,}54 \text{ см}.$$

Известно [7], что если сдвиг по фазе между двумя неравными по величине взаимно перпендикулярными составляющими равен $\pi/2$, то поляризационный эллипс будет вытянут большей полуосью в направлении большей составляющей. Поэтому для первого условия

$$|H_z| = 2|H_x| \ \Rightarrow \ H_0 \frac{\lambda}{\lambda_{кр}} \sin\left(\frac{\pi x_1}{a}\right) = 2 H_0 \frac{\lambda}{\lambda_в} \cos\left(\frac{\pi x_1}{a}\right) \ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \ \mathrm{tg}\left(\frac{\pi x_1}{a}\right) = \frac{2\lambda_{кр}}{\lambda_в} \ \Rightarrow \ \frac{\pi x_1}{a} = \mathrm{arctg}\left(\frac{2\lambda_{кр}}{\lambda_в}\right) \ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \ x_1 = \frac{a}{\pi} \mathrm{arctg}\left(\frac{2\lambda_{кр}}{\lambda_в}\right) = \frac{8{,}64}{\pi} \mathrm{arctg}\left(\frac{2 \cdot 17{,}28}{15{,}4}\right) = 3{,}17 \text{ мм}.$$

Для выполнения второго условия найдем

$$|H_x| = 2|H_z| \;\Rightarrow\; 2H_0\frac{\lambda}{\lambda_{кр}}\sin\left(\frac{\pi x_1}{a}\right) = H_0\frac{\lambda}{\lambda_в}\cos\left(\frac{\pi x_1}{a}\right) \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\; \mathrm{tg}\left(\frac{\pi x_1}{a}\right) = \frac{\lambda_{кр}}{2\lambda_в} \;\Rightarrow\; \frac{\pi x_1}{a} = \mathrm{arctg}\left(\frac{\lambda_{кр}}{2\lambda_в}\right) \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\; x_1 = \frac{a}{\pi}\mathrm{arctg}\left(\frac{\lambda_{кр}}{2\lambda_в}\right) = \frac{8{,}64}{\pi}\mathrm{arctg}\left(\frac{17{,}28}{2\cdot 15{,}4}\right) = 1{,}4\ \text{мм}.$$

Задачи для самостоятельного решения

3.1. В круглом волноводе с волной H_{11} имеется металлическая вставка длиной ℓ (см. рис. 3.1). Вектор напряженности электрического поля в пучности составляет с осью, параллельной вставке, угол 30°. Толщина вставки $d = 4$ мм, радиус волновода a = 2,2 см, частота волны $f = 4$ ГГц.

Определить длину вставки для получения поля волны H_{11} с эллиптической поляризацией, а также коэффициент равномерности поляризационного эллипса этой волны.

3.2. К излучателю в виде открытого конца волновода квадратного сечения для получения вращающегося поля подключены расщепляющая и фазирующая секции в виде отрезка прямоугольного волновода, размер поперечного сечения которого $a \times b = 15{,}8 \times 14{,}8$ мм; возбуждение фазирующей секции осуществляется посредством наклонного штыря.

Определить длину фазирующей секции и угол наклона возбуждающего штыря, которые обеспечивают на выходе волновода поле эллиптической поляризации с коэффициентом равномерности $r \approx 0{,}6$, если длина волны в свободном пространстве $\lambda = 2{,}14$ см.

3.3. Пирамидальный рупор, предназначенный для создания вращающегося поля, имеет раскрыв квадратной формы. Для питания рупора используют фазирующую секцию, состоящую из участка волновода квадратного сечения со стороной a = 12,95 см, вдоль оси которого вставлена тонкая диэлектрическая пластина, перпендикулярная горизонтальным сторонам волновода. Диэлектрическая пластина изготовлена из фторопласта ($\varepsilon = 2{,}2$), длина волны в свободном пространстве $\lambda = 1{,}7$ см. Возбуждение волновода осуществляется с помощью наклонного штыря.

Определить длину фазирующей секции и угол наклона возбуждающего штыря, которые обеспечивают на выходе волновода поле эллиптической поляризации с большой осью эллипса, ориентированной вдоль горизонтальных стенок волновода, и коэффициентом равномерности $r = 0{,}5$.

3.4. Для питания излучателя в виде открытого конца квадратного волновода используют фазирующую секцию, состоящую из участка такого же волновода со стороной a = 10,67 мм, вдоль оси которого вставлена тонкая диэлектрическая пластина, перпендикулярная горизонтальным сторонам волновода. Диэлектрическая пластина изготовлена из эбонита ($\varepsilon = 2{,}67$), длина волны в свободном пространстве $\lambda = 1{,}36$ см. Возбуждение волновода осуществляется посредством наклонного штыря.

Определить длину фазирующей секции и угол наклона возбуждающего штыря, которые обеспечивают поле эллиптической поляризации с большой осью эллипса, ориентированной вдоль вертикальных стенок волновода, и коэффициентом равномерности $r = 0{,}4$.

3.5. Рассчитать сдвиг по фазе между двумя взаимно перпендикулярными составляющими поля $E_в$ и $E_г$. Сдвиг возникает при распространении внутри Н-секториального рупора, питаемого прямоугольным волноводом, возбуждаемым наклонным штырем. Сечение прямоугольного волновода $a \times b = 8{,}6 \times 8{,}2$ мм, постоянный размер поперечного сечения рупора равен меньшей стороне волновода. Ширина диаграммы направленности рупора «по половине мощности» в плоскости, параллельной большему размеру раскрыва $2\theta^{o}_{0,5} = 20^{o}$, длина волны $\lambda = 1{,}15$ см. Искажения фазы на краю раскрыва не превосходят $3\pi/4$.

3.6. Рассчитать сдвиг по фазе между двумя взаимно перпендикулярными составляющими поля $E_в$ и $E_г$, который возникает при распространении внутри Е-секториального рупора, питаемого прямоугольным волноводом, возбужденным наклонным штырем. Сечение прямоугольного волновода $a \times b = 16{,}67 \times 10{,}5$ мм, постоянный размер рупора равен большей стороне волновода. Ширина диаграммы направленности рупора «по половине мощности» в плоскости, параллельной большему размеру раскрыва $2\theta^{o}_{0,5} = 26{,}5^{o}$, длина волны $\lambda = 1{,}36$ см. Искажения фазы на краю раскрыва рупора не превышают $\pi/2$.

3.7. Определить длину фазирующей секции прямоугольного волновода с наклонным штырем, чтобы в раскрыве рупора, рассчитанного в предыдущей задаче, сдвиг по фазе между взаимно перпендикулярными составляющими поля был равен $\pi/2$.

3.8. В раскрыве параболоида вращения установлена решетка из плоских металлических пластин, плоскость которых составляет угол $\alpha = 30^{o}$ с плоскостью поляризации волны, излученной облучателем. Определить ширину пластин, при которой обеспечивается получение поля эллиптической поляризации, а также величину коэффициента равномерности поляризационного эллипса, если расстояние между пластинами $a = 0{,}75\lambda$, а длина волны $\lambda = 2{,}5$ см.

3.9. Для волновода МЭК-220 с размерами поперечного сечения $a \times b = 10{,}688 \times 5{,}32$ мм найти смещение относительно оси широкой стенки волновода местоположения точки, в которой магнитное поле имеет эллиптическую поляризацию с коэффициентом равномерности $r = 0{,}25$, причем:

1) большая полуось эллипса ориентирована вдоль оси волновода;

2) большая полуось эллипса ориентирована вдоль широкой стенки волновода.

3.10. На широкой стенке волновода сечением $a \times b = 50 \times 30$ мм прорезана крестообразная щель, центр которой находится на расстоянии $d = 14{,}5$ мм от узкой стенки волновода. Найти частоту, на которой щель будет излучать поле круговой поляризации.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

Говорков В.А. Теория электромагнитного поля в упражнениях и задачах / В.А. Говорков, С.Д. Купалян. – М.: Высш. шк., 1963. – 371 с.

Никольский В.В. Электродинамика и распространение радиоволн / В.В. Никольский. – М.: Наука, 1978. – 543 с.

Меньшиков А.Г. Сборник задач по электродинамике, антеннам и устройствам СВЧ / А.Г. Меньшиков, В.П. Серегин, А.Д. Французов. – Челябинск: ЧПИ, 1976. – 80 с.

Белоцерковский Г.Б. Задачи и расчеты по курсу "Основы радиотехники и антенны"/ Г.Б. Белоцерковский. – М.: Машиностроение, 1966. – 198 с.

Вольман В.И. Техническая электродинамика / В.И. Вольман, Ю.В. Пименов. – М.: Связь, 1971. – 487 с.

Шубарин Ю.В. Задачник по антеннам и распространению радиоволн / Ю.В. Шубарин, В.А. Калинин, Ю.И. Давидчевский. – Х.: ХВАИВУ, 1956. – 71с.

Гольдштейн Л.Д. Электромагнитные поля и волны / Л.Д. Гольдштейн, Н.В. Зернов. – М.: Сов. радио, 1971. – 662 с.

Заикин И.П. Проектирование антенных устройств систем связи / И.П. Заикин, А.В. Тоцкий, С.К. Абрамов. – Х.: Нац. аэрокосм. ун-т "Харьк. авиац. ин-т", 2007. – 77 с.

СОДЕРЖАНИЕ

1. Основы электродинамики…… 3
2. Линии передачи СВЧ……29
3. Фазирующие и поляризационные устройства……75
Библиографический список……...92

Заикин Иван Павлович
Ткаченко Александра Александровна
Тоцкий Александр Владимирович

СБОРНИК ЗАДАЧ
ПО ТЕХНИЧЕСКОЙ ЭЛЕКТРОДИНАМИКЕ

Редактор В.И. Филатова

Св. план, 2009
Подписано в печать 30.04.2009
Формат 60x84 1/16. Бум. офс. №2. Офс. печ.
Усл. печ. л. 5,2. Уч.- изд. л. 5,87. Т. 100 экз. Заказ 117. Цена свободная

Национальный аэрокосмический университет им. Н.Е. Жуковского
«Харьковский авиационный институт»
61070, Харьков-70, ул. Чкалова, 17
http://www.khai.edu
Издательский центр «ХАИ»
61070, Харьков-70, ул. Чкалова, 17
izdat@khai.edu