МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ УКРАИНЫ
Национальный аэрокосмический университет им. Н.Е. Жуковского
«Харьковский авиационный институт»

С.Н. Барсуков

ТЕОРИЯ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО ПОЛЯ.

ОБЪЕМНЫЕ РЕЗОНАТОРЫ И ЗАМЕДЛЯЮЩИЕ СТРУКТУРЫ

Учебное пособие

Харьков «ХАИ» 2008

УДК 621.372.413

Барсуков С.Н. Теория электромагнитного поля. Объемные резонаторы и замедляющие структуры: учеб. пособие / С.Н. Барсуков. – Х.: Нац. аэрокосм. ун-т «Харьк. авиац. ин-т», 2008. – 54 с.

Изложена теория электромагнитных процессов в объемных резонаторах и замедляющих структурах СВЧ. Рассмотрены особенности и типы колебаний резонаторов, а также их основные характеристики. Приведена методика анализа диэлектрических и гребенчатых замедляющих структур.

Для студентов факультета радиотехнических систем летательных аппаратов при усвоении части 3 лекционного курса «Техническая электродинамика».

Ил. 36. Библиогр.: 4 назв.

Рецензенты: канд. техн. наук, доц. Е.А. Милькевич,
канд. техн. наук А.А. Приемко

©Национальный аэрокосмический университет им. Н.Е. Жуковского
«Харьковский авиационный институт», 2008 г.

1. ОБЪЕМНЫЕ РЕЗОНАТОРЫ

В диапазоне СВЧ невозможно применение колебательных контуров с сосредоточенными параметрами. При повышении частоты индуктивность вырождается в одновитковый элемент, а емкость соизмерима с емкостью монтажа. Уменьшение добротности связано с уменьшением характеристического сопротивления, увеличением сопротивления потерь и излучением контура. Поэтому в сантиметровом диапазоне в качестве колебательных контуров применяются объемные резонаторы.

Объемный резонатор – это некоторый объем, ограниченный хорошо проводящей оболочкой. В резонаторе происходят накопление энергии электромагнитного поля, а также периодический обмен энергией между электрической и магнитной компонентами.

1.1. Структура поля прямоугольного резонатора

Прямоугольный резонатор можно представить как отрезок волновода, ограниченного с двух сторон металлическими заглушками (рис. 1.1).

Составляющие электромагнитного поля резонатора определяются из решения краевой задачи: волновых уравнений Гельмгольца совместно с граничными условиями для тангенциальных и нормальных компонент ($E_\tau = 0,\ H_n = 0$).

Решение задачи упрощается, если воспользоваться известными компонентами поля для прямоугольного волновода [4] с учетом дополнительных граничных условий на торцевых стенках, которые закорачивают его (рис. 1.2).

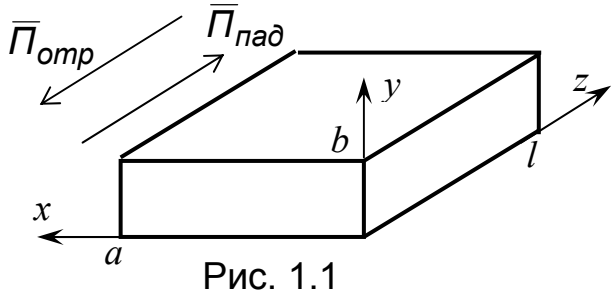


Рис. 1.1

Сформируем граничные условия в координатах короткого замыкания при $Z = 0,\quad Z = l$.

Структуру поля вдоль продольной координаты можно представить как сумму падающей и отраженной волн (см. рис. 1.1) с учетом дополнительных граничных условий.

1. Закоротим волновод при $Z = l$, тогда комплексная амплитуда падающей волны

$$\dot{\overline{\Pi}}_{пад}:\ \dot{\overline{E}}_{пад} = \dot{\overline{E}}_{\tau_1}(x,y)e^{-jhz},$$

а отраженной волны

$$\dot{\overline{\Pi}}_{отр}:\ \dot{\overline{E}}_{отр} = \dot{\overline{E}}_{\tau_2}(x,y)e^{jhz}.$$

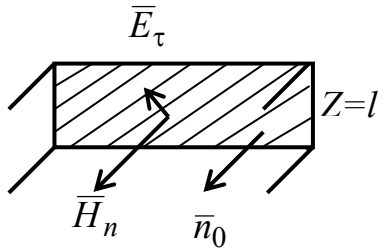


Рис. 1.2

Для произвольной координаты Z суммарная волна имеет вид

$$\dot{\bar{E}} = \dot{\bar{E}}_{пад} + \dot{\bar{E}}_{отр} = \dot{\bar{E}}_{\tau_1} e^{-jhz} + \dot{\bar{E}}_{\tau_2} e^{jhz},$$

или в соответствии с граничным условием при $Z = l$

$$\dot{\bar{E}}_{\tau}(l) = \dot{\bar{E}}_{\tau_1} e^{-jhl} + \dot{\bar{E}}_{\tau_2} e^{jhl} = 0.$$

2. Закоротим волновод при $Z = 0$, тогда граничное условие в этой координате

$$\dot{\bar{E}}_{\tau}(0) = \dot{\bar{E}}_{\tau_1} + \dot{\bar{E}}_{\tau_2} = 0, \qquad \text{т. е.} \quad \dot{\bar{E}}_{\tau_1} = -\dot{\bar{E}}_{\tau_2},$$

а в скалярной форме записи

$$\begin{cases} \dot{E}_{\chi_1} = -\dot{E}_{\chi_2}; \\ \dot{E}_{y_1} = -\dot{E}_{y_2}. \end{cases}$$

Тогда первое граничное условие при $Z = 0$ примет следующий вид:

$$\dot{\bar{E}}_{\tau}(l) = \dot{\bar{E}}_{\tau_1}(e^{-jhl} - e^{jhl}) = 0,$$

т.е.

$$-2j\dot{\bar{E}}_{\tau_1} \sin(hl) = 0,$$

так как

$$\frac{e^{jx} - e^{-jx}}{2j} = \sin x.$$

Это условие выполняется, если $hl = p\pi$, $p = 1,2,3,\ldots$, т.е.

$$h = \frac{p\pi}{l}.$$

При этом полученный параметр представляет собой волновое число стоячей волны вдоль продольной координаты.

Граничное условие для нормальной компоненты $\bar{H}_n$ конкретизируется аналогично: $\dot{H}_{z_1} = -\dot{H}_{z_2}$.

Таким образом, векторы $\bar{H}_n$ и $\bar{E}_{\tau}$ при отражении изменяют свое направление, что обеспечивает выполнение нулевых граничных условий.

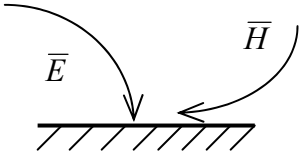


Рис. 1.3

Векторы $\bar{H}_{\tau}$ и $\bar{E}_n$ направление при отражении не изменяют, что приводит к удвоению амплитуды волны на отражающей поверхности, т.е.

$$H_{x_1} = H_{x_2},\ H_{y_1} = H_{y_2},\ E_{z_1} = E_{z_2}.$$

Следовательно, вблизи идеально проводящей поверхности вектор $\bar{H}$ имеет только тангенциальную компоненту, а вектор $\bar{E}$ – только нормальную (рис. 1.3).

Общие координатные граничные условия на торцевых стенках имеют такой вид:

$$E_\tau = 0 \quad \begin{cases} \dot{E}_{x_1} = -\dot{E}_{x_2}; \\ \dot{E}_{y_1} = -\dot{E}_{y_2}, \end{cases} \text{ а } H_\tau \neq 0, \text{ т.е. } H_{x_1} = H_{x_2},\ H_{y1} = H_{y2}; \quad (1.1)$$

$$H_n = 0 \quad \{\dot{H}_{z_1} = -\dot{H}_{z_2}, \quad \text{а} \quad E_n \neq 0, \text{ т.е. } E_{z1} = E_{z2}.$$

В соответствии с граничными условиями суммирование волн неизменяющихся векторов производится по следующему правилу:

$$\dot{H}_\tau = H_{x_1} e^{-jhz} + H_{x_2} e^{jhz} = 2H_0 \cos(hz), \text{ так как } \frac{e^{jx} + e^{-jx}}{2} = \cos x.$$

Для определения составляющих поля резонатора будем исходить из компонент поля Е-волны прямоугольного волновода. Пространственные изменения компонент поля в плоскости поперечного сечения волновода восстанавливаются, исходя из граничных условий.

Например, для компоненты $\dot{H}_y$ вдоль узкой стенки волновода (координата *y*) закон изменения будет $\dot{H}_y \sim \sin(g_y y)$, так как для широких стенок $\dot{H}_y$ – это нормальная компонента, которая должна обращаться в нуль ($\dot{H}_n = 0$), что соответствует синусоидальному закону изменения (рис. 1.4).

Аналогично вдоль широкой стенки (координата x) для данной компоненты закон изменения будет $\dot{H}_y \sim \cos(g_\chi x)$. На границах этой стенки, т.е. на узких стенках, $\dot{H}_y = \dot{H}_\tau$, поэтому тангенциальная составляющая должна быть максимальной, что соответствует косинусоидальному закону изменения (рис. 1.5).

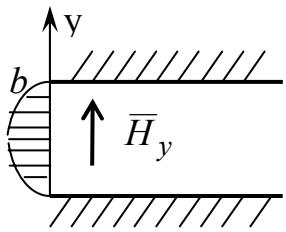


Рис. 1.4

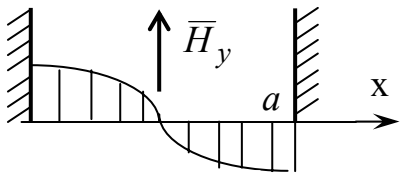


Рис. 1.5

В плоскости поперечного сечения резонатора покажем графически законы изменений компонент поля, принимая также во внимание соответствующие граничные условия (рис. 1.6).

На основе этих распределений выпишем компоненты поля для Е-волны [4]:

$$\dot{E}_z = E_{01} \sin(g_x x) \sin(g_y y) e^{-jhz};$$

$$\dot{E}_y = -jh \frac{g_y}{g^2} E_{01} \sin(g_x x) \cos(g_y y) e^{-jhz};$$

$$\dot{E}_x = -jh\frac{g_x}{g^2}E_{01}\cos(g_x x)\sin(g_y y)e^{-jhz}; \qquad (1.2)$$

$$\dot{H}_x = j\omega\varepsilon\frac{g_y}{g^2}E_{01}\sin(g_x x)\cos(g_y y)e^{-jhz};$$

$$\dot{H}_y = -j\omega\varepsilon\frac{g_x}{g^2}E_{01}\cos(g_x x)\sin(g_y y)e^{-jhz}.$$

Для получения окончательных выражений в каждой компоненте необходимо выполнить суммирование падающих и отраженных волн. При суммировании компонент следует пользоваться правилом, которое вытекает из приведенных выше граничных условий.

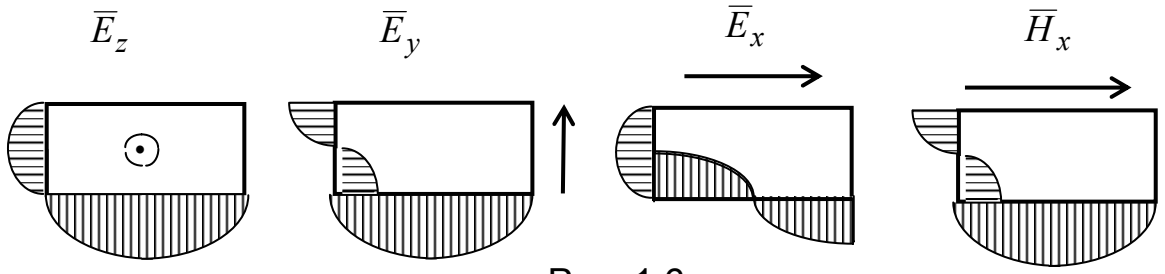


Рис. 1.6

В тех составляющих, которые не обращаются в нуль $(\dot{H}_\tau, \dot{E}_n)$, т.е. $\dot{H}_x, \dot{H}_y, \dot{E}_z$, векторы при отражении направление не меняют, поэтому при суммировании экспонента e^{-jhz} заменяется на $2\cos(hz)$.

Соответственно составляющие, обеспечивающие нулевые граничные условия $(\dot{H}_n, \dot{E}_\tau)$, при суммировании дают замену:

$$e^{-jhz} \to -2j\sin(hz).$$

Произведем соответствующие замены в компонентах волны (1.2):

$\dot{H}_\tau, \dot{E}_n \neq 0$ для $\dot{H}_x$, $\dot{H}_y$, $\dot{E}_z$, т.е. $e^{-jhz} \to 2\cos(hz)$, (1.2 а)

а $\dot{H}_n, \dot{E}_\tau = 0$ для $\dot{H}_z$, $\dot{E}_x$, $\dot{E}_y$, т.е. $e^{-jhz} \to -2j\sin(hz)$.

Введя новое обозначение $2E_{01} = E_0$, получим составляющие электромагнитного колебания резонатора типа E_{mnp}:

$$\dot{E}_z = E_0\sin(g_x x)\sin(g_y y)\cos(hz);$$

$$\dot{E}_x = -E_0 h\frac{g_x}{g^2}\cos(g_x x)\sin(g_y y)\sin(hz);$$

$$\dot{E}_y = -E_0 h\frac{g_y}{g^2}\sin(g_x x)\cos(g_y y)\sin(hz); \qquad (1.3)$$

$$\dot{H}_x = jE_0\omega\varepsilon\frac{g_y}{g^2}sin(g_x x)cos(g_y y)cos(hz);$$

$$\dot{H}_y = -jE_0\omega\varepsilon\frac{g_x}{g^2}cos(g_x x)sin(g_y y)cos(hz);$$

$$\dot{H}_z = 0.$$

Аналогично определим составляющие для колебания Н-типа. Компоненты поля для Н-волны запишем на основе распределений [4], показанных на рис. 1.7:

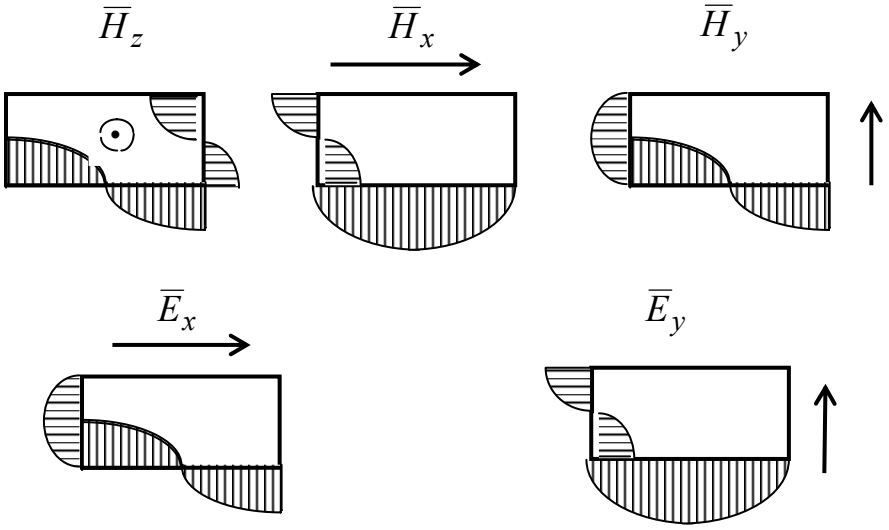


Рис. 1.7

$$\dot{H}_z = H_{01}cos(g_x x)cos(g_y y)e^{-jhz};$$

$$\dot{H}_x = jh\frac{g_x}{g^2}H_{01}sin(g_x x)cos(g_y y)e^{-jhz};$$

$$\dot{H}_y = jh\frac{g_y}{g^2}H_{01}cos(g_x x)sin(g_y y)e^{-jhz}; \qquad (1.4)$$

$$\dot{E}_x = j\omega\mu\frac{g_y}{g^2}H_{01}cos(g_x x)sin(g_y y)e^{-jhz};$$

$$\dot{E}_y = -j\omega\mu\frac{g_x}{g^2}H_{01}sin(g_x x)cos(g_y y)e^{-jhz}.$$

В соответствии с правилом суммирования (1.2 а) получим компоненты колебания типа H_{mnp}:

$$\dot{H}_z = -jH_0cos(g_x x)cos(g_y y)sin(hz);$$

$$\dot{H}_x = jH_0 h \frac{g_x}{g^2} sin(g_x x) cos(g_y y) cos(hz);$$

$$\dot{H}_y = jH_0 h \frac{g_y}{g^2} cos(g_x x) sin(g_y y) cos(hz); \qquad (1.5)$$

$$\dot{E}_x = H_0 \omega\mu \frac{g_y}{g^2} cos(g_x x) sin(g_y y) sin(hz);$$

$$\dot{E}_y = -H_0 \omega\mu \frac{g_x}{g^2} sin(g_x x) cos(g_y y) sin(hz);$$

$$\dot{E}_z = 0.$$

В этих формулах введены следующие обозначения волновых чисел:

- поперечные

$$g_\chi = \frac{m\pi}{a}, \qquad g_y = \frac{n\pi}{b};$$

- продольное

$$h = \frac{p\pi}{l}.$$

Взаимосвязь волновых чисел в поперечном и продольном сечениях резонатора запишем в соответствии с их геометрией (рис. 1.8):

$$g^2 = g_x^2 + g_y^2, \qquad k^2 = h^2 + g^2,$$

где k – волновое число для неограниченного пространства.

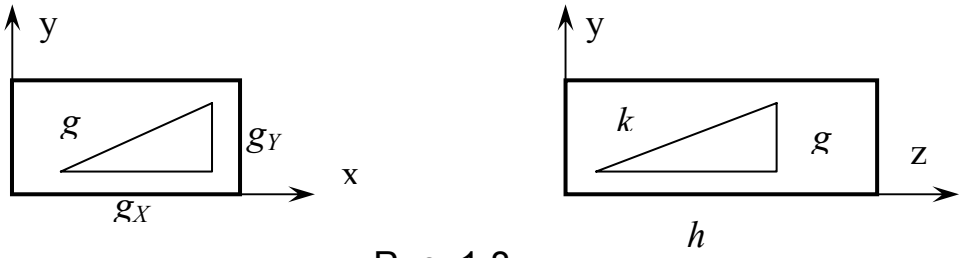


Рис. 1.8

Вдоль каждой из координат резонатора устанавливаются стоячие волны с соответствующими волновыми числами. Значения чисел вытекают из выполнения граничных условий.

Резонансные параметры резонатора

1. Резонансная частота определяется из выражения для волнового числа неограниченного пространства

$$k = \frac{\omega}{\upsilon},$$

где $\upsilon = \dfrac{1}{\sqrt{\varepsilon\mu}}$.

Следовательно, $$\omega = \frac{k}{\sqrt{\varepsilon\mu}} = \frac{\sqrt{h^2 + g^2}}{\sqrt{\varepsilon\mu}},$$

т.е. $$\omega_0 = \frac{\pi}{\sqrt{\varepsilon\mu}}\sqrt{\left(\frac{m}{a}\right)^2 + \left(\frac{n}{b}\right)^2 + \left(\frac{p}{l}\right)^2}, \qquad (1.6)$$

где m, n, p – числовые индексы, определяющие тип колебания,

ε, μ – абсолютная диэлектрическая и магнитная проницаемости внутренней среды резонатора.

2. Резонансная длина волны находится из волнового числа неограниченного пространства

$$k = \frac{2\pi}{\lambda_0},$$

откуда

$$\lambda_0 = \frac{2\pi}{k},$$

где $k^2 = h^2 + g^2 = h^2 + g_x^2 + g_y^2$.

Тогда

$$\lambda_0 = \frac{2}{\sqrt{\left(\frac{m}{a}\right)^2 + \left(\frac{n}{b}\right)^2 + \left(\frac{p}{l}\right)^2}}. \qquad (1.7)$$

3. Резонансная длина резонатора вычисляется, исходя из выполнения граничных условий на торцах резонатора:

$$sin(hl) = 0,$$

откуда

$$hl = p\pi, \quad \text{или} \quad h = \frac{p\pi}{l}.$$

С другой стороны, $$h = \frac{2\pi}{\lambda в}.$$

Приравнивая два последних выражения, получаем искомый параметр

$$l_0 = p\frac{\lambda в}{2}, \qquad (1.8)$$

где $\lambda в$ – длина волны в волноводе.

Резонансную длину волны λ_0 можно найти также, исходя из длины волны в волноводе

$$\lambda в = \frac{\lambda_0}{\sqrt{1-\left(\frac{\lambda_0}{\lambda_К}\right)^2}},$$

где критическая длина волны

$$\lambda_К = \frac{2}{\sqrt{\left(\frac{m}{a}\right)^2+\left(\frac{n}{b}\right)^2}}.$$

Учитывая выражения для резонансной длины резонатора (1.8), получаем

$$\frac{2l_0}{p} = \frac{\lambda_0}{\sqrt{1-\left(\frac{\lambda_0}{\lambda_К}\right)^2}},$$

т.е.

$$\sqrt{1-\left(\frac{\lambda_0}{\lambda_К}\right)^2} = \lambda_0 \frac{p}{2l_0},$$

или

$$1 = \left(\frac{\lambda_0}{\lambda_К}\right)^2 + \lambda_0^2\left(\frac{p}{2l_0}\right)^2,$$

откуда

$$\lambda_0 = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{\lambda_K^2}+\left(\frac{p}{2l_0}\right)^2}}.$$

Заметим, что резонансное значение длины волны соответствует длине, измеренной в свободном пространстве (длине волны генератора).

ВЫВОДЫ:

1. Объемный резонатор имеет множество резонансных частот ω_{mnp}, каждой из которых соответствует свой тип колебаний – H_{mnp}, E_{mnp}.

2. В обозначении типа колебаний буквы E, H определяют наличие соответствующей продольной составляющей колебаний. Числовые индексы m, n, p указывают число полуволн стоячей волны вдоль соответствующей координаты (ребра) резонатора: $m \to a$, $n \to b$, $p \to l$.

3. Существующие типы колебаний определяются возможными значениями числовых индексов.

В электрическом типе колебаний E_{mnp} индексы m, n должны быть отличны от нуля: $m \neq 0,\ n \neq 0$ (по аналогии с волноводом).

Колебания типа E_{mn0} с индексами $m = 1,2, \ldots$, $n = 1,2,\ldots$, $p = 0$ возможны, так как в соответствии с граничными условиями на торцевых стенках тангенциальные компоненты E_χ, E_y должны изменяться по закону синуса $sin(hz)$, поскольку $E_\tau = 0$. Тогда при $p = 0$ продольное волновое число также обращается в нуль $(h = 0)$, при этом поперечные компоненты отсутствуют: $E_x = E_y = 0$. В этом случае граничные условия $E_\tau = 0$ выполняются при любой длине резонатора.

Колебания типа H_{mn0} не существуют, так как при $p = 0$ поперечные компоненты вдоль продольной координаты не должны изменяться: $E_{x,y}(z) = const$. Поэтому составляющие E_χ, E_y нарушают граничное условие на поперечных стенках.

4. Наименьшие резонансные частоты имеют низшие типы колебаний, так как при уменьшении индексов колебаний резонансная частота (1.6) также уменьшается: $\omega_{mnp} \downarrow m \downarrow, n \downarrow, p \downarrow$.

Увеличение геометрических размеров резонатора приводит к уменьшению резонансной частоты ω_0, т.е. $a \uparrow, b \uparrow, l \uparrow \rightarrow \omega_{mnp} \downarrow$.

Размеры резонатора для низших типов колебаний соизмеримы с длиной волны $\lambda_в$.

5. Основной тип колебаний соответствует наименьшей резонансной частоте.

Низшими типами колебаний являются колебания типов H_{101}, H_{011}, E_{110}. При этом основной тип колебаний зависит от соотношения ребер резонатора и определяется размером минимального ребра:

$$\mathrm{E}_{110} - \min l; \quad \mathrm{H}_{101} - \min b; \quad \mathrm{H}_{011} - \min a.$$

Действительно, поскольку минимальный размер ребра дает самое большое увеличение частоты, то этот размер должен быть исключен нулевым индексом. Основным является тот низший тип колебания, в котором отсутствуют вариации поля вдоль наименьшего ребра. Следовательно, указанные три типа колебаний имеют одну и ту же структуру поля, а отличаются только ориентацией системы координат относительно резонатора.

6. Изменения во времени электрических и магнитных составляющих колебаний сдвинуты по фазе на $\pi/2$ (1.3),(1.5), что определяет множитель j, так как $j = e^{j\frac{\pi}{2}}$. Поэтому существуют моменты време-

ни, когда вся энергия сосредоточена только в электрическом или магнитном поле.

7. Компоненты поля основного типа колебаний H_{101} определяются как частный случай колебания типа H_{mnp}.

Подставляя соответствующие индексы в компоненты колебания Н-типа (1.5), получаем составляющие основного типа колебаний:

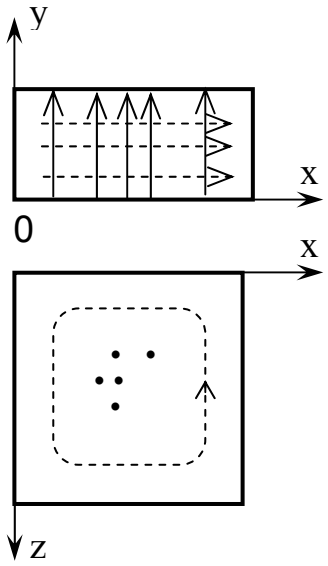


Рис. 1.9

$$\dot{H}_z = -jH_0 \cos(g_x x)\sin(hz);$$

$$\dot{H}_x = jH_0 h \frac{g_x}{g^2}\sin(g_x x)\cos(hz);$$

$$\dot{E}_y = -H_0 \omega\mu \frac{g_x}{g^2}\sin(g_x x)\sin(hz).$$

Структура поля этого типа колебаний показана на рис. 1.9. Колебание является поперечно-электрическим, т.е. линии вектора $\overline{E}$ лежат в плоскости поперечного сечения xoy. Изменения во времени электрической и магнитной компонент колебания сдвинуты по фазе на 90^0 (множитель j).

1.2. Поверхностные токи колебания H_{10P}

Распределение поверхностного тока резонатора определяется структурой магнитных линий на стенках резонатора:

$$\overline{j_s} = \overline{n}_0 \times \overline{H}_\tau. \qquad (1.9)$$

Магнитные компоненты поля можно записать из общих выражений (1.5) для частного случая $n = 0$:

$$\dot{H}_z = -jH_0 \cos(\frac{\pi\chi}{a})\sin(p\frac{\pi z}{l});$$

$$\dot{H}_x = jH_0 h \frac{g_x}{g^2}\sin(\frac{\pi\chi}{a})\cos(p\frac{\pi z}{l}), \qquad (1.10)$$

где $h\frac{g_x}{g^2} = \frac{h}{g_x} = \frac{p\pi}{l}\cdot\frac{a}{m\pi} = p\frac{a}{l}.$

Компоненты поверхностного тока находятся из векторного произведения (1.9) на основании рис. 1.10 для каждой стенки резона резонатора при фиксации соответствующей пространственной координаты:

- токи боковых стенок $j_y = \dot{H}_z$ при $x = 0$, $x = a$ (плоскость *YOZ*);

- торцы резонатора $j_y = \dot{H}_x$ при $z = 0$, $z = l$ (плоскость *YOX*);

- основания резонатора

$$j = \sqrt{j_x^2 + j_z^2}$$

при $y = 0, y = b$, где $j_x = \dot{H}_z$, $j_z = \dot{H}_x$ (плоскость *XOZ*).

Компоненты плотности тока на всех плоскостях резонатора запишем с учетом магнитных компонент $\dot{H}_z$ и $\dot{H}_x$ (1.10):

- плоскость *YOZ* – $$j_y = \dot{H}_z \big/_{x=0, x=a} = \pm jH_0 \sin\left(p\frac{\pi z}{l}\right);$$

- плоскость *XOY* – $$j_y = \dot{H}_x \big/_{z=0, z=l} = \pm jH_0\left(p\frac{a}{l}\right)\sin\left(\frac{\pi x}{a}\right);$$

- плоскость *XOZ* – $$j_x = \dot{H}_z = -jH_0 \cos(\frac{\pi \chi}{a})\sin(p\frac{\pi z}{l}),$$

$$j_z = \dot{H}_x = jH_0\left(p\frac{a}{l}\right)\sin(\frac{\pi \chi}{a})\cos(p\frac{\pi z}{l}),$$

причем $j = \sqrt{j_x^2 + j_y^2}$.

Отметим особенности структуры поверхностного тока.

1. В боковых стенках и торцах резонатора присутствует только поперечная компонента тока j_y.

2. В основаниях резонатора есть как продольная j_z, так и поперечная j_x составляющие тока. В середине широкой стенки при $x = a/2$ поперечная составляющая тока отсутствует ($j_x = 0$), т.е. имеется только продольная составляющая j_z. Вдоль продольной координаты резонатора z существуют особые точки с координатами z_n, в которых $j_z = 0$, т.е. присутствует только поперечная компонента j_x. Действительно, $j_z = 0$, т.е. $\cos\left(p\frac{\pi z}{l}\right) = \cos(hz_n) = 0$. Тогда

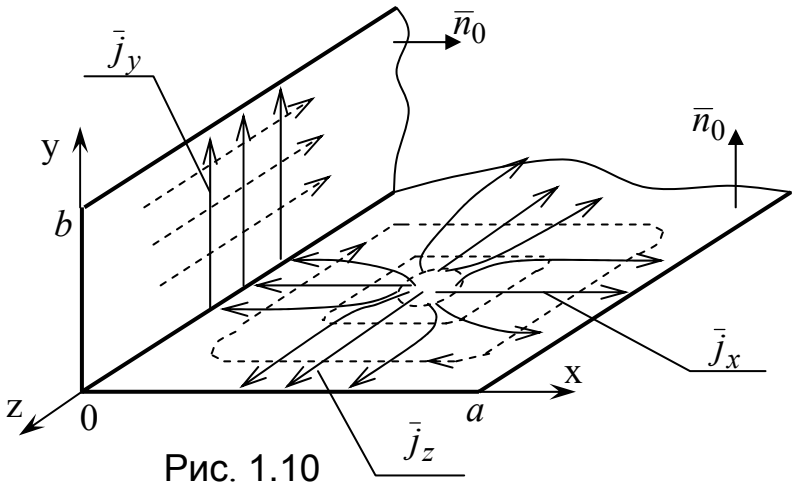


Рис. 1.10

$hz_n = \frac{\pi}{2}(2n+1)$, а с учетом $h = \frac{2\pi}{\lambda_в}$ имеем

$$z_n = \frac{\lambda_в}{4}(2n+1).$$

В окрестности точек с координатами $(x = \frac{a}{2}; z_n)$ $j_x = j_z = 0$, т.е. ток проводимости равен нулю, в результате ток переходит в ток смещения. При этом в этих областях концентрируется поверхностный заряд $\varepsilon E_y = \rho_s$, изменение которого во времени создает поперечный ток смещения $j_{c_y} = \varepsilon \frac{\partial E_y}{\partial t}$.

1.3. Собственная добротность резонатора

Добротность – это параметр, который определяет качество резонатора. Энергетическое определение добротности

$$Q = 2\pi \frac{W_н}{\Delta W_n} \tag{1.11}$$

показывает превышение энергии, накопленной в колебательной системе $W_н$, над энергией, теряемой за один период колебаний ΔW_n.

Выразим формулу добротности через среднюю мощность потерь:

$$P_{ср} = \frac{\Delta W_n}{T},$$

откуда

$$\Delta W_n = TP_{ср} = \frac{2\pi}{\omega} P_{ср}.$$

Подставим это выражение в исходную формулу (1.11):

$$Q = 2\pi \frac{W_н \cdot \omega}{2\pi P_{ср}}.$$

Отсюда окончательно получим выражение

$$Q = \omega \frac{W_н}{P_{ср}}. \tag{1.12}$$

Выбрав момент времени, когда вся энергия заключена в магнитном или электрическом поле, определим накопленную энергию

$$W_н = \frac{\mu}{2}\int_v H_m^2 dv = \frac{\varepsilon}{2}\int_v E_m^2 dv,$$

где H_m, E_m – амплитуды электрического и магнитного полей, причем

$$E_m^2 = E_x^2 + E_y^2 + E_z^2, \qquad H_m^2 = H_x^2 + H_y^2 + H_z^2,$$

$\varepsilon, \mu -$ абсолютные проницаемости среды внутри резонатора;

ν – объем резонатора.

Очевидно, что $w_э = \dfrac{\varepsilon E_m^2}{2}, w_н = \dfrac{\mu H_m^2}{2} -$ объемные плотности энергий.

Потери мощности в резонаторе состоят из трех компонент:

$$P_n = P_{cp} + P_д + P_c,$$

где P_{cp} – джоулевы потери в стенках резонатора при протекании высокочастотных поверхностных токов;

$P_Д$ – мощность потерь в диэлектрической среде внутри объема резонатора;

P_c – потери в элементах связи резонатора с внешними устройствами.

Основной вес потерь составляют потери в стенках резонатора, поэтому $P_n \approx P_{cp}$.

Средняя мощность потерь определяется действительной частью потока нормальной составляющей комплексного вектора Пойнтинга через поверхность резонатора (рис. 1.11):

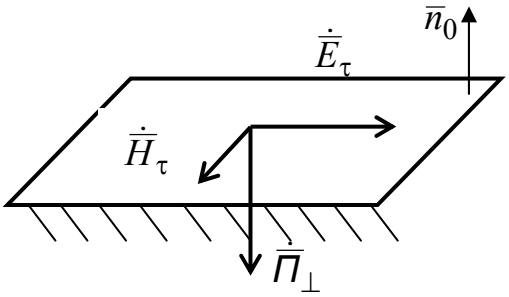


Рис. 1.11

$$P_{cp} = Re\int_s \dot{\bar{\Pi}}_\perp d\bar{S},$$

где $\dot{\bar{\Pi}}_\perp = \dfrac{1}{2}\left[\dot{\bar{E}}_\tau \times \dot{\bar{H}}_\tau^*\right] = \dfrac{1}{2}\left[\dot{E}_\tau \cdot \dot{H}_\tau^*\right] \cdot \bar{n}_0.$ (1.12 а)

Граничное условие Леонтовича определяет величину тангенциальной составляющей E_τ, т.е. $\dot{E}_\tau = Z_c \dot{H}_\tau$ или $\dot{E}_\tau = Z_s j_s$, где поверхностное сопротивление

$$Z_s = \frac{1+i}{\sigma d}.$$

Подставив условие Леонтовича в (1.12 а), выразим вектор Пойнтинга через одну компоненту поля:

$$\dot{\bar{\Pi}}_\perp = \frac{1}{2} Z_s H_\tau^2 \bar{n}_0 = \frac{1}{2}\frac{1}{Z_s} E_\tau^2 \bar{n}_0.$$

Расчетное соотношение для средней мощности потерь примет следующий вид:

$$P_{cp} = Re\int_s \frac{E_\tau^2}{2Z_s}\overline{n}_0 d\overline{S}\text{, или } \quad P_{cp} = \frac{R_s}{2}\int_s H_\tau^2 dS,$$

где $R_s = \dfrac{1}{\sigma d}$ –действительная часть поверхностного сопротивления;

H_τ – модуль тангенциальной составляющей вектора.

Используя полученные выражения для накопленной энергии и средней мощности потерь, запишем электродинамическую формулу добротности объемного резонатора

$$Q = \omega\frac{W_н}{P_{cp}} = \omega\frac{\mu\int_v H_m^2 dv}{R_s\int_s H_\tau^2 dS}.$$

Преобразуем коэффициенты перед интегралами, используя известное представление поверхностного сопротивления:

$$\frac{\omega\mu}{R_s} = \omega\mu\sigma\cdot d,$$

где $d = \sqrt{\dfrac{2}{\omega\sigma\mu_{cm}}}$ – глубина проникновения поля.

Тогда

$$\frac{\omega\mu}{R_s} = \frac{\mu}{\mu_{cm}}\frac{\omega\sigma\mu_{cm}}{2}2d = \frac{\mu}{\mu_{cm}}\frac{1}{d^2}2d = 2\frac{\mu}{\mu_{cm}}\frac{1}{d},$$

причем μ_{cm} – абсолютная магнитная проницаемость стенок, а для немагнитных стенок $\mu \approx \mu_{cm} \approx \mu_0$.

Расчетная формула электродинамического определения добротности окончательно примет вид

$$Q = \frac{2}{d}\frac{\int_v H_m^2 dv}{\int_s H_\tau^2 dS}, \qquad (1.13)$$

где $H_m^2 = H_x^2 + H_y^2 + H_z^2$ – квадрат модуля магнитной составляющей поля внутри резонатора;

H_τ – модуль тангенциальной составляющей на стенках резонатора;

d – глубина проникновения поля в металл;

V, S – соответственно объем резонатора и площадь его внутренней поверхности.

Добротность резонатора зависит от следующих факторов:

- структуры поля;
- геометрических размеров и формы резонатора;
- удельной проводимости стенок и частоты колебаний.

Определим добротность резонатора для колебания H_{10p} (1.10). Предварительно запишем квадрат модуля магнитной компоненты, используя (1.10):

$$\left|\dot{\mathrm{H}}_m\right|^2 = \mathrm{H}_x^2 + \mathrm{H}_z^2 = \mathrm{H}_0^2\left(\cos^2\frac{\pi x}{a}\sin^2 p\frac{\pi z}{l} + \left(h\frac{g_x}{g^2}\right)^2 \sin^2\frac{\pi x}{a}\cos^2 p\frac{\pi z}{l}\right).$$

Преобразуем сомножитель

$$h\frac{g_x}{g^2} = h\frac{g_x}{g_x^2 + g_y^2} = \frac{h}{g_x} = \frac{p\pi}{l}\cdot\frac{a}{\pi m} = p\frac{a}{l},$$

так как при $n = 0$ поперечное волновое число $g_y = \dfrac{n\pi}{b} = 0.$

Вычислим интеграл по объему

$$J_1 = \int_v \mathrm{H}_m^2 dv = \int_0^a\int_0^b\int_0^l H^2 dxdydz.$$

С учетом составляющих квадрата модуля

$$J_1 = H_0^2 b\left(\frac{a}{2}\cdot\frac{l}{2} + \left(p\frac{a}{l}\right)^2\cdot\frac{a}{2}\cdot\frac{l}{2}\right) = H_0^2\frac{abl}{4}\left[1 + \left(p\frac{a}{l}\right)^2\right],$$

причем при вычислении интеграла принимаем во внимание типовые интегралы

$$\int_0^a \cos^2\frac{\pi\chi}{a}dx = \frac{a}{2}, \qquad \int_0^a \sin^2\frac{\pi x}{a}dx = \frac{a}{2}, \qquad \int_0^l dz = l.$$

Определим интеграл по поверхности

$$J_2 = \int_s H_\tau^2 dS = 2\int_0^l\int_0^a H_\tau^2 dxdz + 2\int_0^b\int_0^a H_\tau^2\Big/_{z=0}\, dxdy + 2\int_0^l\int_0^b H_\tau^2\Big/_{x=0}\, dydz.$$

При вычислении каждого слагаемого для записи H_τ следует выбирать компоненты, параллельные (тангенциальные) данной плоскости резонатора (рис. 1.12):

- первый интеграл

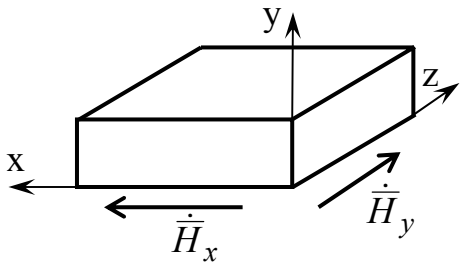


Рис. 1.12

$$2\int_0^l\int_0^a H_\tau^2 dxdz = 2\int_0^l\int_0^a \left(H_x^2 + H_z^2\right)dxdz = 2H_0^2\left(\frac{a}{2}\cdot\frac{l}{2} + \left(p\frac{a}{l}\right)^2\cdot\frac{a}{2}\cdot\frac{l}{2}\right);$$

- второй интеграл

$$2\int_0^b\int_0^a H_\tau^2\Big|_{z=0} dxdy = 2\int_0^b\int_0^a H_x^2\Big|_{z=0} dxdy = 2H_0^2\int_0^b\int_0^a\left(p\frac{a}{l}\right)^2 sin^2\frac{\pi x}{a}dxdy =$$

$$= 2H_0^2\left(p\frac{a}{l}\right)^2\cdot\frac{a}{2}\cdot b;$$

- третий интеграл

$$2\int_0^l\int_0^b \mathrm{H}_\tau^2\Big|_{x=0} dydz = 2\int_0^l\int_0^b \mathrm{H}_z^2\Big|_{x=0} dydz = 2\mathrm{H}_0^2\int_0^l\int_0^b \sin^2 p\frac{\pi z}{l}dydz = 2\mathrm{H}_0^2 b\cdot\frac{l}{2}.$$

Подставим найденные интегралы в общую формулу для добротности (1.13):

$$Q = \frac{2}{d}\cdot\frac{H_0^2\frac{abl}{4}\left[1+\left(p\frac{a}{l}\right)^2\right]}{2H_0^2\left[\frac{al}{4}\left(1+\left(p\frac{a}{l}\right)^2\right)+\frac{ab}{2}\left(p\frac{a}{l}\right)^2+\frac{bl}{2}\right]}.$$

Преобразуем это выражение:

$$Q = \frac{1}{d}\cdot\frac{abl\left[1+\left(p\frac{a}{l}\right)^2\right]}{al\cdot\left[1+\left(p\frac{a}{l}\right)^2\right]+2ab\left(p\frac{a}{l}\right)^2+2bl} =$$

$$= \frac{1}{d}\cdot\frac{abl\left[l^2+(pa)^2\right]}{al\left[l^2+(pa)^2\right]+2b\cdot\left[a(pa)^2+l^3\right]}.$$

Окончательно получим

$$Q = \frac{b}{d}\cdot\frac{l^2+(ap)^2}{\left[l^2+(ap)^2\right]+\frac{2b}{al}\cdot\left[l^3+a(ap)^2\right]}. \qquad (1.14)$$

Оценим зависимость добротности от геометрических параметров резонатора.

1. Влияние размера b. Резонансная частота не зависит от b, так как для данного типа колебаний $n = 0$, однако этот параметр влияет на добротность.

Представим знаменатель в формуле (1.14) в ином виде:

$$(ap)^2\left[1+\frac{2b}{l}\right]+l^2\left[1+\frac{2b}{a}\right].$$

Рассмотрим его для двух случаев:

а) b – велико, т.е. $2b \rangle\rangle l$, $2b \rangle\rangle a$, тогда

$$Q \approx \frac{b}{d}\cdot\frac{l^2+(ap)^2}{2b\left[\frac{(ap)^2}{l}+\frac{l^2}{a}\right]},$$

следовательно, добротность не зависит от размера b;

б) b – мало, т.е. $2b<<l$, $2b<<a$, тогда

$$Q=\frac{b}{d}\cdot\frac{(ap)^2+l^2}{(ap)^2+l^2}=\frac{b}{d}.$$

Сильное уменьшение размера b в плоском резонаторе приводит к уменьшению его добротности.

2. Влияние размеров резонатора при колебании H_{101}.

Пусть $a = b = l$, тогда $$Q=\frac{a}{d}\cdot\frac{a^2+a^2}{3\left(a^2+a^2\right)}=\frac{a}{3d}.$$

Учитывая глубину проникновения поля $d=\sqrt{\frac{2}{\omega\sigma\mu}}$ и резонансную частоту $\omega=\vartheta\pi\sqrt{\left(\frac{1}{a}\right)^2+\left(\frac{1}{l}\right)^2}=\frac{\vartheta\pi\sqrt{2}}{a}$, имеем

$$Q=\frac{a}{3d}=\frac{a}{3}\cdot\sqrt{\frac{\omega\sigma\mu}{2}}=\frac{a}{3}\cdot\sqrt{\frac{\vartheta\pi\sqrt{2}}{2a}\sigma\mu}\sim\sqrt{a}.$$

Следовательно, добротность кубического резонатора увеличивается с увеличением его размеров.

3. Влияние формы резонатора. Поскольку добротность определяется отношением объемного интеграла к поверхностному, то геометрическое тело с наибольшим отношением объема к поверхности

имеет большую добротность, что соответствует сферической форме резонатора.

Оценим величину добротности для кубического резонатора

$$Q = \frac{a}{3d}.$$

При резонансной частоте $\omega_0 = \frac{\vartheta\pi\sqrt{2}}{a}$ размер ребра резонатора

$$a = \frac{\vartheta\pi\sqrt{2}}{2\pi f_0} = \frac{\vartheta}{\sqrt{2}f_0},$$

тогда

$$Q = \frac{1}{3d} \cdot \frac{\vartheta}{\sqrt{2}f_0}.$$

Например, на длине волны $\lambda = 10\,см$ $(3000\,МГц)$ в зависимости от материала добротность достигает следующих величин: латунь – Q = 10000; медь – Q = 19600.

1.4. Разновидности резонаторов

1.4.1. Цилиндрический резонатор

Этот резонатор представляет собой закороченный с двух сторон отрезок круглого волновода.

Резонансная длина волны

$$\lambda_0 = \frac{2\pi}{k} = \frac{2\pi}{\sqrt{h^2 + g^2}}$$

с учетом волновых чисел $h = \frac{p\pi}{l}$ и $g = k_k = \frac{2\pi}{\lambda_k}$ определяется по следующей формуле:

$$\lambda_0 = \frac{2\pi}{\sqrt{\left(\frac{\pi p}{l}\right)^2 + \left(\frac{2\pi}{\lambda_k}\right)^2}} = \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{p}{2l}\right)^2 + \frac{1}{\lambda_k^2}}}.$$

Подставим выражение для критической длины волны $\lambda_К$, которая вычисляется через критическое значение волнового числа

$$k_{kp} = \frac{2\pi}{\lambda_k}.$$

Взаимосвязь волновых чисел $h^2 = k^2 - g^2$ для критического случая $h = 0$ дает $k_{кр} = g = \frac{\nu_{mn}}{a}$, так как поперечное волновое число круглого волновода $g = \frac{\nu_{mn}}{a}$ [4]. Сравнивая два представления поперечного волнового числа, получаем

$$\lambda_k = \frac{2\pi a}{\nu_{mn}}.$$

Подставляя эту формулу в выражение резонансной длины волны, для колебания типа E_{mnp} имеем

$$\lambda_0 = \frac{2}{\sqrt{\left(\frac{p}{l}\right)^2 + \left(\frac{\nu_{mn}}{\pi a}\right)^2}}, \qquad (1.15)$$

где ν_{mn} – корни функций Бесселя;

m – порядок функции;

n – номер корня.

Аналогично для колебаний типа H_{mnp} резонансная длина волны

$$\lambda_0 = \frac{2}{\sqrt{\left(\frac{p}{l}\right)^2 + \left(\frac{q_{mn}}{\pi a}\right)^2}}, \qquad (1.16)$$

где q_{mn} – корни производных функций Бесселя.

Проанализируем возможные типы колебаний. Колебания типа H_{mno} не существуют, так как:

1) такие колебания являются поперечно-электрическими $(E_z = 0)$;

2) вдоль продольной оси z амплитуда колебаний не изменяется, потому что индекс $p = 0$;

3) на торцевых стенках $E_r = E_\varphi = 0$, поэтому при любой координате z электрическое поле отсутствует.

Колебания типа E_{mno} существуют, так как при нулевом индексе p в электрическом поле остается продольная компонента E_z, которая не обращается в нуль.

В цилиндрическом резонаторе существуют такие виды колебаний:

- E_{mnp} : m = 0,1,…, n = 1,2,…, p = 0,1,2,…;
- H_{mnp} : m = 0,1,2,…, n = 1,2,3,…, p =1,2,3,….

Минимальный индекс $m = 0$, так как порядки функций Бесселя нумеруются, начиная с нулевого индекса. Минимальный индекс $n = 1$, так как корни функций нумеруются, начиная с единицы.

Особенности низших типов колебаний:

1. Колебание типа E_{010} имеет резонансную длину волны (1.15) $\lambda_0 = \dfrac{2\pi a}{\nu_{01}}$, т.е. при $\nu_{01} = 2{,}6$ она составляет $\lambda_0 = 2{,}62a$. При таком типе колебаний поле не изменяется вдоль продольной координаты *z*, так как $p = 0$ (рис. 1.13). Резонансная длина волны не зависит от длины резонатора l. Добротность резонатора определяется соотношением

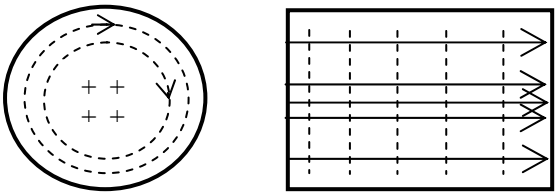


Рис. 1.13

$$Q = \frac{2}{d} \cdot \frac{\int\limits_{\nu} H_m^2 d\nu}{\int\limits_{s} H_\tau^2 dS}.$$

Если допустить, что $H_\tau^2, H_m^2 = const$, т.е. не зависят от пространственных координат, то Q приближенно определяется отношением объема резонатора к его поверхности. Действительно, объем $\nu = S_0 \cdot l$, где S_0 – площадь основания, т.е. $S_0 = \pi a^2$, полная поверхность резонатора $S = 2S_0 + 2\pi a \cdot l$, тогда отношение объема к поверхности

$$\frac{\nu}{S} = \frac{l}{2\left(1 + \dfrac{\pi a l}{S_0}\right)} = \frac{l}{2\left(1 + \dfrac{l}{a}\right)} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\dfrac{1}{l} + \dfrac{1}{a}},$$

а асимптотическое значение добротности

$$Q = \frac{1}{d} \cdot \frac{1}{\dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{l}}.$$

В коротком резонаторе при уменьшении его длины ($l \to 0$) добротность уменьшается ($Q \to 0$) и, наоборот, при увеличении длины резонатора добротность стремится к постоянной величине. Например, при $a = l$ на длине волны $\lambda = 10\,см$ добротность медного резонатора составляет $Q_0 = 15900$. Следовательно, уменьшение длины резонатора не влияет на его резонансную частоту, но сильно уменьшает его добротность.

2. Колебание типа E_{011} (рис. 1.14) имеет резонансную длину волны (1.15)

$$\lambda_0 = \frac{2}{\sqrt{\left(\frac{1}{l}\right)^2 + \left(\frac{\nu_{01}}{\pi a}\right)^2}},$$

причем $\lambda_{011} > \lambda_{010}$.

При увеличении длины резонатора резонансные частоты приближаются друг к другу, что нежелательно.

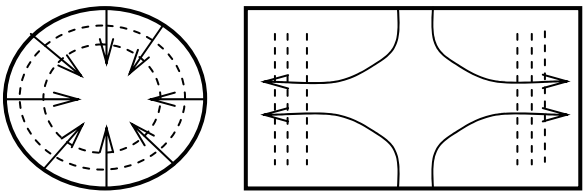


Рис. 1.14

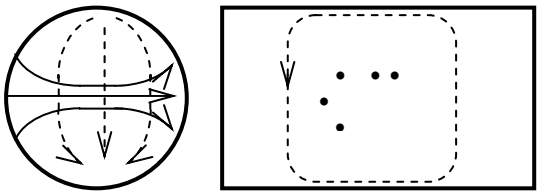


Рис. 1.15

3. Колебание типа H_{111} (1.16) (рис. 1.15) имеет резонансную длину волны

$$\lambda_0 = \frac{2}{\sqrt{\left(\frac{1}{l}\right)^2 + \left(\frac{q_{11}}{\pi a}\right)^2}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{4l^2} + \frac{1}{(3{,}41a)^2}}}.$$

При малой длине резонатора, т.е. $l<2{,}1a$ (плоский резонатор), $\lambda_{E_{010}} > \lambda_{H_{111}}$. Это означает, что колебание типа E_{010} является основным. При $l = 2{,}1a$ критические частоты равны, т.е. колебания вырождены.

4. Колебание типа H_{011} (рис. 1.16) имеет резонансную длину волны

$$\lambda_0 = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{4l^2} + \frac{1}{(1{,}64a)^2}}}.$$

Круглый волновод на волне типа H_{01} с длиной, равной половине длины волны в волноводе, образует резонатор с такими характеристиками:

1. Резонатор имеет высокую добротность (10^5), так как потери в стенках невелики и уменьшаются при увеличении радиуса.

2. При перестройке резонатора поршнем не требуется электрический контакт со стенками резонатора, так как токи имеют кольцевой

характер.

3. Колебание типа H_{011} не является низшим, кроме того, колебания H_{01p}, E_{11p} – вырожденные. Поэтому предпринимают меры для подавления колебания E_{11p}, используя свободный поршень или кольцевые канавки с поглощающим составом.

4. Чем больше длина резонатора, тем ближе к резонансной частоте $\lambda_{E_{010}}$ располагаются резонансные длины волн других типов колебаний.

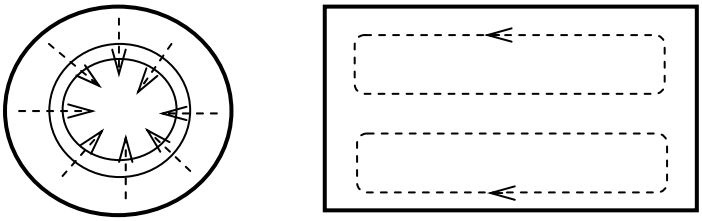


Рис. 1.16

В силу высокой добротности резонаторы на колебании типа H_{011} применяются как высокодобротные волномеры, эхорезонаторы.

1.4.2. Квазистационарные резонаторы

В таких резонаторах электрические и магнитные поля пространственно разнесены. Эта особенность позволяет выделить индуктивные и емкостные области резонатора.

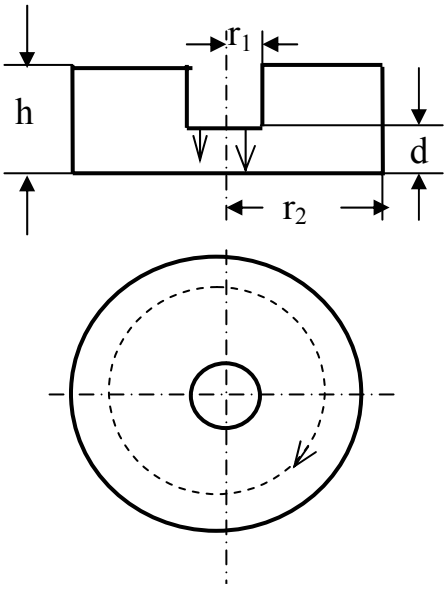


Рис. 1.17

Представителем этого типа резонаторов является тороидальный резонатор, который используется, в частности, в клистронах.

Геометрия резонатора приведена на рис. 1.17, где его размеры удовлетворяют следующим условиям:

$$r_2 << \frac{\lambda}{4};\ h << \frac{\lambda}{4};\ d << h.$$

Электрическое поле $\overline{E}$ локализовано в центре резонатора, а магнитное поле $\overline{H}$ – в тороидальной части.

Для основного типа колебаний линейные размеры резонатора намного меньше длины волны, поэтому расчет эквивалентных емкостей и индуктивностей $C_э, L_э$ можно производить, как для постоянных полей (квазистационарный принцип).

Эквивалентная емкость внутренней цилиндрической области резонатора

$$C \cong \varepsilon \frac{S}{d} = \varepsilon \frac{\pi r_1^2}{d},$$

а индуктивность тороидальной части

$$L = \frac{\Phi}{I},$$

где магнитный поток $\Phi = \mu \int\limits_{S_\perp} \overline{H} d\overline{S}$,

I – ток, охватываемый магнитным потоком;

$S_\perp$ – площадь поперечного сечения тороидальной части.

Для произвольного концентрического контура в соответствии с законом Ампера $\oint\limits_l \overline{H} d\overline{l} = I$, т.е. $H 2\pi r = I$, следовательно, $H = \dfrac{I}{2\pi r}$.

Тогда магнитный поток

$$\Phi = \mu \frac{I}{2\pi} \int\limits_{S_\perp} \frac{dS}{r},$$

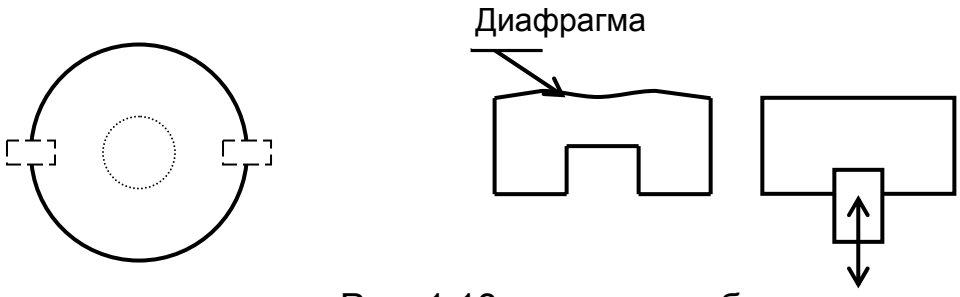
а индуктивность

$$L = \frac{\Phi}{I} = \frac{\mu}{2\pi} \int\limits_{S_\perp} \frac{dS}{r} = \frac{\mu}{2\pi} \int\limits_0^h \int\limits_{r_1}^{r_2} \frac{drdz}{r} = \frac{\mu h}{2\pi} ln \frac{r_2}{r_1}.$$

Резонансная частота резонатора

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon\mu} \cdot \sqrt{\dfrac{hr_1^2}{2d} \ln \dfrac{r_2}{r_1}}} = \upsilon_0 \sqrt{\frac{2d}{hr_1^2 \ln \dfrac{r_2}{r_1}}}. \qquad (1.17)$$

Для настройки резонатора применяются индуктивный и емкостный способы.



а Рис. 1.18 б

Индуктивный способ настройки осуществляется с помощью винтов в боковой поверхности тороида, при этом уменьшение радиуса r_2 сопровождается увеличением резонансной частоты (рис. 1.18, а). Второй вариант индуктивной настройки реализуют с помощью ме-

таллических лопаток путем изменения их ориентации относительно оси резонатора.

Емкостный способ перестройки заключается в изменении ширины емкостного зазора с помощью деформации диафрагмы либо перемещения цилиндра (рис. 1.18, б). Диапазон перестройки составляет $(10...20)\%$ от значения резонансной частоты.

Вогнутые резонаторы имеют более низкую добротность, чем выпуклые, так как увеличивается площадь поверхности стенок.

Рассмотренный тип резонатора применяется в отражательных клистронах, где емкостная часть имеет сеточную конструкцию. Возбуждение резонатора происходит за счет электронного потока, модулированного по плотности. Электронный поток наводит токи смещения, отдавая часть кинетической энергии.

Резонатор магнетронного типа

Резонатор представляет собой цилиндрическую структуру, поперечное сечение которой приведено на рис. 1.19. Резонатор содержит несколько элементарных резонаторов – ламелей, которые связаны между собой общим электронным потоком.

На рис. 1.20 показана отдельная ламель. В цилиндрической части радиусом *R* и высотой *h* сосредоточено магнитное поле, а в плоскостной части $a \times d$ – электрическое.

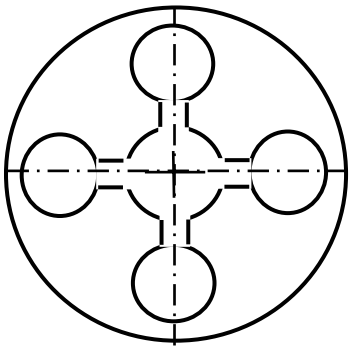


Рис. 1.19

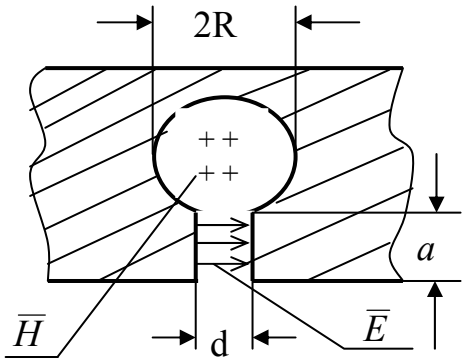


Рис. 1.20

Эквивалентные емкость и индуктивность соответствующих областей ламели определяются по формулам

$$C = \varepsilon \frac{ah}{d}, \qquad L = \frac{\Phi}{I} = \frac{BS_{\perp}}{I} = \frac{\mu H \pi R^2}{I}.$$

Рассматривая индуктивный элемент как отрезок бесконечного соленоида, определяем напряженность магнитного поля

$$H = \frac{I}{h},$$

тогда величина индуктивности

$$L = \frac{\mu \pi R^2}{h}.$$

Резонансная частота элемента

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon\mu} \cdot \sqrt{\frac{\pi R^2 ah}{hd}}}, \quad \text{или} \quad \omega_0 = \frac{\upsilon_0}{R}\sqrt{\frac{d}{\pi a}}, \quad (1.18)$$

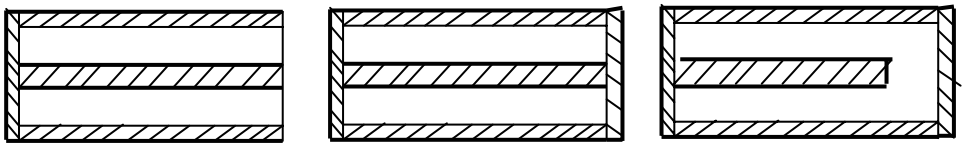
где введено обозначение

$$\upsilon_0 = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon\mu}}.$$

Резонатор возбуждается потоком электронов, которые движутся от катода к аноду по спиральным траекториям в постоянном магнитном поле, ориентированном вдоль оси резонатора. Роль анода выполняет тело резонатора, а катод помещен в его центре.

1.4.3. Коаксиальный резонатор

Коаксиальный резонатор – это отрезок коаксиальной линии, открытый или закрытый на концах (рис. 1.21), который применяется в метровом и дециметровом диапазонах волн.



а б в

Рис. 1.21

Условие отсутствия высших типов колебаний [4]

$$\lambda_0 > \pi \frac{D+d}{2}$$

определяется диаметрами внутреннего и внешнего проводников.

Наименьшее затухание наблюдается при соотношении диаметров $\frac{D}{d} = 3{,}6$, а приемлемое затухание – при соотношении $\frac{D}{d} = (2{,}5...6{,}0)$. Добротность составляет несколько тысяч единиц на длине волны $\lambda = 10\ см$.

Волновое сопротивление коаксиального кабеля рассчитывается по известной формуле [4]

$$Z_в = \frac{Z_c}{2\pi}\ln\frac{R_2}{R_1} = 60\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}\ln\frac{R_2}{R_1}\ Ом.$$

Определим резонансную длину резонатора l_0. Входное сопротивление длинной линии, короткозамкнутой на конце, определяется следующим выражением:

$$Z_{вх} = Z_c jtgkl.$$

По аналогии с параллельным колебательным контуром условие резонанса соответствует бесконечно большому входному сопротивлению $Z_{вх} = \infty$, поэтому из предыдущей формулы следует, что

$$kl = (2n-1)\frac{\pi}{2}, \qquad \text{т.е.} \qquad \frac{2\pi}{\lambda}l = (2n-1)\frac{\pi}{2},$$

а резонансная длина резонатора

$$l_0 = \frac{\lambda}{4}(2n-1).$$

Это же выражение можно получить, рассматривая поле в резонаторе как совокупность падающей и отраженной волн. Пусть со стороны открытого конца резонатора распространяется падающая волна. При прохождении резонатора волна приобретает пространственный набег фазы $\psi_1 = kl$. Соответственно при прохождении обратного расстояния после отражения от короткозамкнутого конца набег фазы волны составит $\psi_2 = kl$. При отражении от короткозамкнутого конца произойдет скачок фазы $\varphi_1 = \pi$, так как $E = 0, U = 0$, а при отражении от разомкнутого конца – скачок фазы $\varphi_2 = 0$, так как $2E, 2U$.

Для синфазного суммирования падающей и отраженной волн общая фаза должна быть кратна 2π (условие резонанса):

$$\psi = \psi_1 + \psi_2 + \varphi_1 + \varphi_2 = 2kl + \pi = 2\pi n,$$

откуда резонансная длина резонатора

$$l_0 = \frac{1}{2K}\cdot\pi(2n-1) = \frac{\lambda}{4}(2n-1).$$

Для резонатора, замкнутого на концах, фазовые соотношения определяют такое условие резонанса:

$$\psi = 2kl + \pi + \pi = 2\pi n, \qquad \text{т.е.} \quad 2\cdot\frac{2\pi}{\lambda}\cdot l = 2\pi n_1,$$

что дает резонансную длину

$$l_0 = \frac{\lambda}{2}n_1.$$

Настройка резонатора производится короткозамыкающим поршнем.

На рис. 1.21, в изображен резонатор с укорачивающей емкостью. Для уменьшения резонансной длины резонатора в нем имеется емкостный зазор. Эквивалентная схема резонатора приведена на рис. 1.22.

Рис. 1.22

При длине резонатора $l < \frac{\lambda}{4}$ линия имеет индуктивный характер, поэтому она называется укороченной линией. Условие резонатора $X_L = X_C$, откуда $\frac{1}{\omega_0 C} = Z_c tg\left(\frac{2\pi}{\lambda_0} l\right)$, где $C = \varepsilon \frac{\pi a^2}{d}$. Тогда резонансная частота определяется следующим выражением:

$$\omega_0 = \frac{1}{CZ_c} ctg(kl). \qquad (1.19)$$

Перестройка резонатора осуществляется изменением зазора (емкостный способ) или длины резонатора (индуктивный способ).

1.4.4. Открытые резонаторы

В коротковолновой части миллиметрового диапазона и в оптическом диапазоне объемные резонаторы не применяются, т.к. для низших колебаний его размеры должны быть соизмеримы с длиной волны.

На высоких частотах проявляются такие основные недостатки закрытых объемных резонаторов:

1. Потери в стенках резонатора возрастают с увеличением частоты по закону, соответствующему ~ $f^{\frac{3}{2}}$, что является недопустимым в миллиметровом диапазоне.

2. Неидеальность поверхности стенок резонатора приводит к дальнейшему росту потерь.

3. С увеличением резонансной частоты (работа на высших типах колебаний при больших индексах *m, n, p*) увеличивается плотность резонансных частот, что приводит к перекрытию резонансных кривых, т.е. резонатор теряет свойство избирательности. Количество резонансных частот, приходящихся на полосу частот $\Delta\omega$, подчиняется закону Рэлея - Джинса [1]

$$N = \frac{V}{2\pi^2 C^2} \omega^2 \Delta\omega,$$

где V – объем резонатора, $C = \dfrac{1}{\sqrt{\varepsilon\mu}}$.

Требования к резонаторам миллиметрового диапазона волн и более коротковолновой области:

а) работа на высших типах колебаний для обеспечения приемлемых размеров резонатора;

б) получение прореженного спектра собственных частот на высших типах колебаний;

в) уменьшение потерь в стенках путем локализации электромагнитного поля, т.е. уменьшение поверхности соприкосновения поля с металлом.

Таким требованиям удовлетворяют открытые резонаторы. *Открытый резонатор* – это система, содержащая две отражающие поверхности (рис. 1.23). В простейшем случае это две параллельные плоскости, разнесенные на расстояние l, причем $l = p \cdot \dfrac{\lambda}{2}$.

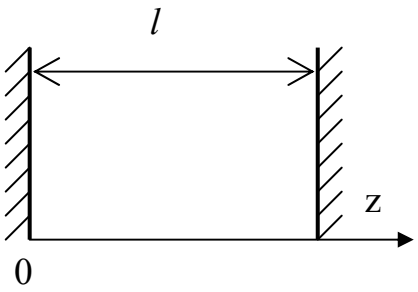


Рис. 1.23

Поскольку резонатор ограничен только по одной пространственной координате, то в спектре частот остаются только типы колебаний, определяемые отражением от торцевых стенок. Поэтому спектр возможных колебаний становится разреженным.

Действительно, резонансные длины волн или резонансные частоты определяются следующими выражениями:

$$\lambda_p = \frac{2l}{p}, \qquad \omega_p \sim \frac{p}{2l}.$$

Отсюда частотный разнос соседних колебаний обратно пропорционален длине резонатора, т.е.

$$\omega_n - \omega_{n+1} \sim \frac{1}{2l},$$

а разнос резонансных частот не зависит от текущей частоты.

Добротность резонатора определяется общим энергетическим соотношением

$$Q = \omega \cdot \frac{W}{P_n},$$

где W – запасенная энергия электромагнитного поля резонатора.

Выражение для средней мощности потерь получим, исходя из следующих величин:

- $\dfrac{W}{2}$ – энергия обратной и прямой волн;

- $t = \dfrac{l}{V_{гр}}$ – время, за которое весь поток энергии пройдет через поперечное сечение резонатора, где $V_{гр} = \dfrac{1}{\sqrt{\varepsilon\mu}}$;
- $\dfrac{W}{2t} = \dfrac{W}{2} \cdot \dfrac{V_{\text{гр}}}{l}$ – средний поток энергии за единицу времени, или средняя мощность падающей волны;
- $\dfrac{W}{2} \cdot \dfrac{V}{l}(1 - R)$ – средняя мощность потерь на одном зеркале, где *R* – коэффициент отражения по мощности;
- $P_n = W \cdot \dfrac{V}{l}(1 - R)$ – мощность потерь от двух зеркал.

Подставляя W, P_n в выражение для добротности, получаем

$$Q = \omega \frac{W}{P_n} = \omega \frac{l}{v} \cdot \frac{1}{1-R} = \frac{kl}{1-R} = 2\pi \frac{l}{\lambda} \cdot \frac{1}{1-R}. \qquad (1.20)$$

Реальные величины добротности составляют $Q_{реал} = 10^4 ... 10^5$.

Плоский резонатор чувствителен к перекосам поверхностей, поэтому также применяют конфокальный резонатор. В этом резонаторе сферические отражающие зеркала имеют общий фокус (рис. 1.24). Внутри резонатора показана область, которая называется каустикой.

Каустика – это поверхность внутри пространства резонатора, которая является граничной для пучка лучей (с точки зрения геометрической оптики). Вне этой области пространства интенсивность поля уменьшается по закону экспоненты.

В открытых резонаторах существуют типы колебаний TEM_{mnp}, где *m, n* – вариации поля в поперечном сечении, а *p* – число полуволн вдоль резонатора. Параметр *p* опускают, так как $p >> 1$, т.е. длина резонатора на несколько порядков превышает длину волны колебаний. Фактически в колебании присутствуют продольные компоненты поля E_z, H_z, но они невелики по сравнению с поперечными компонентами, поэтому поле является квазипоперечным. Открытые зеркальные резонаторы применяются в миллиметровом и субмиллиметровом диапазонах волн, в частности в оптических квантовых генераторах.

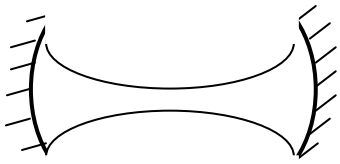


Рис. 1.24

2. ЗАМЕДЛЯЮЩИЕ СТРУКТУРЫ

Замедляющие структуры – это такие направляющие системы, в которых фазовая скорость $\vartheta_ф$ меньше скорости волны в неограниченном пространстве.

2.1. Фазовая скорость и возможности ее уменьшения

Фазовая скорость в неограниченном пространстве

Волновое уравнение волны для неограниченного пространства

$$\nabla^2 \dot{\overline{E}} + k^2 \dot{\overline{E}} = 0, \qquad (2.1)$$

где $\dot{\overline{E}} = \dot{\overline{E}}_0 e^{-jkz}$ – комплексная амплитуда электрической компоненты монохроматической волны;

$k = \dfrac{2\pi}{\lambda} = \dfrac{\omega}{\vartheta_ф} = \omega\sqrt{\varepsilon\mu}$ – волновое число.

Плоская электромагнитная волна имеет одну составляющую вектора $\overline{E}$ (рис. 2.1), поэтому уравнение (2.1) принимает скалярный характер:

$$\frac{d^2 \dot{E}_x}{dz^2} + k^2 \dot{E}_x = 0, \qquad (2.2)$$

где *z* – направление распространения волны.

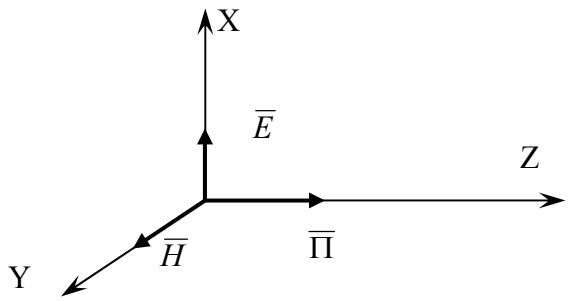


Рис. 2.1

Решение волнового уравнения (2.2)

$$\dot{E}_x = Ae^{-jkz} + Be^{jkz}.$$

Прямая волна соответствует первому слагаемому:

$$\dot{E}_x = Ae^{-jkz} = E_0 e^{-jkz}.$$

Действительная форма электрической компоненты

$$E_x(t) = Re\left[\dot{E}_x e^{j\omega t}\right],$$

$$\overline{E}(t) = \overline{x}_0 E_0 \cos(\omega t - kz).$$

В неограниченном пространстве распространяется ТЕМ-волна с фазовой скоростью $\vartheta_ф$, определяемой электродинамическими параметрами среды ε, μ.

Фазовая скорость – это скорость перемещения в пространстве поверхности равных фаз. Фиксируя полную фазу

$$\varphi = \omega t - kz = const,$$

переходя к производной по времени

$$\frac{d\varphi}{dt} = \omega - k\frac{dz}{dt} = 0,$$

определяем фазовую скорость

$$\vartheta_{\phi} = \frac{dz}{dt} = \frac{\omega}{k}, \quad \text{или} \quad \vartheta_{\phi} = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon\mu}}.$$

Фазовая скорость в полупространстве, ограниченном идеальной проводящей плоскостью

Геометрия задачи приведена на рис. 2.2, где 1, 2 – индексы, определяющие соответственно диэлектрическую и идеально проводящую среды; *S* – плоскость раздела сред (поверхность идеального проводника); $\overline{E}, \overline{H}$ – векторы исходной плоской ТЕМ-волны; $\overline{\Pi}$ – вектор Пойнтинга ТЕМ-волны.

При отражении от поверхности *S* вектор Пойнтинга неограниченного пространства $\overline{\Pi}$ (волновое число – k) раскладывается на две составляющие с соответствующими волновыми числами:

$$\overline{\Pi} = \overline{\Pi}_{\perp} + \overline{\Pi}_{\tau},$$

где $\overline{\Pi}_{\perp}$ – нормальная (поперечная) составляющая вектора Пойнтинга, которая определяет стоячую волну (поперечное волновое число – γ);

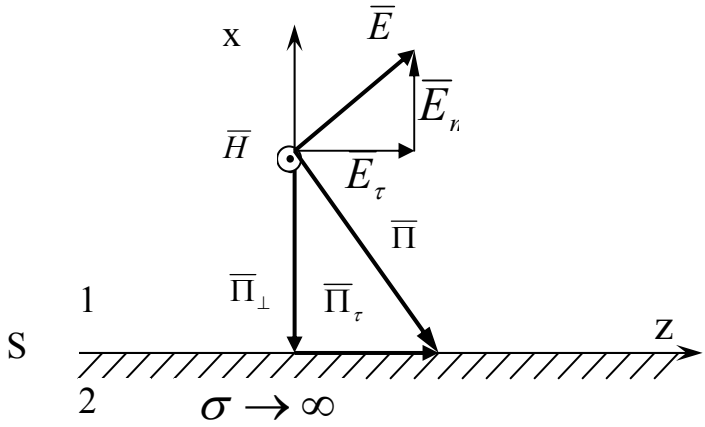


Рис. 2.2

$\overline{\Pi}_{\tau}$ – тангенциальная (продольная) составляющая вектора Пойнтинга, определяющая бегущую волну (продольное волновое число – h).

Взаимосвязь волновых чисел можно определить из рис. 2.3.

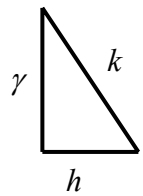


Рис. 2.3

Волновое уравнение для продольной компоненты

$$\nabla^2 \dot{E}_z + k^2 \dot{E}_z = 0, \tag{2.3}$$

причем пространственные границы будут $x \geq 0$, $-\infty < y < \infty$, а граничное условие – $E_z = 0, x = 0$.

При неограниченной поперечной координате y изменение поля по

этой координате отсутствует, поэтому в лапласиане примем $\frac{d}{dy} = 0$.

Решение волнового уравнения (2.3) для направляемой волны имеет следующий вид:

$$\dot{E}_z = \dot{E}_0(x)e^{-jhz}. \qquad (2.3\ а)$$

Подставим это решение в исходное волновое уравнение (2.3), в котором раскроем лапласиан с учетом нулевого слагаемого по координате y:

$$\frac{\partial^2 \dot{E}_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \dot{E}_z}{\partial z^2} + k^2 \dot{E}_z = 0.$$

При этом второе слагаемое представим в соответствии с формулой

$$\frac{\partial^2 \dot{E}_z}{\partial z^2} = (-jh)^2 \dot{E}_z = -h^2 \dot{E}_z.$$

Одномерное волновое уравнение примет вид

$$\frac{\partial^2 \dot{E}_z}{\partial x^2} + \gamma^2 \dot{E}_z = 0, \qquad (2.4)$$

где введено обозначение $\gamma^2 = k^2 - h^2$.

Сокращая уравнение (2.4) на экспоненту, получаем

$$\frac{d^2 \dot{E}_0}{dx^2} + \gamma^2 \dot{E}_0 = 0. \qquad (2.5)$$

Решение уравнения (2.5) будет иметь вид

$$E_0 = A\,cos(\gamma x) + B\,sin(\gamma x).$$

Подставляя граничное условие $x = 0,\ E_0 = 0$ в предыдущее уравнение, имеем *A = 0*.

Комплексная амплитуда волны (2.3 а)

$$\dot{E}_z = E_{01}\,sin(\gamma x)e^{-jhz}, \qquad (2.6)$$

а ее действительная форма

$$E_z(t) = E_0\,sin(\gamma x)cos(\omega t - hz).$$

Уравнения взаимосвязи поперечных компонент через продольные с учетом $\frac{\partial}{\partial y} = 0$, $H_z = 0$ определяют остальные составляющие волны:

$$\dot{E}_x = -j\frac{h}{\gamma^2} \cdot \frac{\partial \dot{E}_z}{\partial x}; \qquad \dot{H}_y = -j\frac{\omega\varepsilon}{\gamma^2} \cdot \frac{\partial \dot{E}_z}{\partial x}. \qquad (2.7)$$

В полупространстве распространяется Е-волна с фазовой скоростью

$$\vartheta_{ф} = \frac{\omega}{h},$$

при этом продольное волновое число уменьшается, т.е.

$$h = \sqrt{k^2 - \gamma^2},$$

что приводит к увеличению фазовой скорости.

2.2. Диэлектрическая замедляющая структура

Эта структура представляет собой слой диэлектрика на поверхности металла.

Формальный метод уменьшения фазовой скорости заключается в изменении характера поперечного волнового числа, которое становится мнимым:

$$\gamma = jp,$$

тогда $h = \sqrt{k^2 + p^2}$, т.е. *h*>*k*, что приводит к уменьшению фазовой скорости.

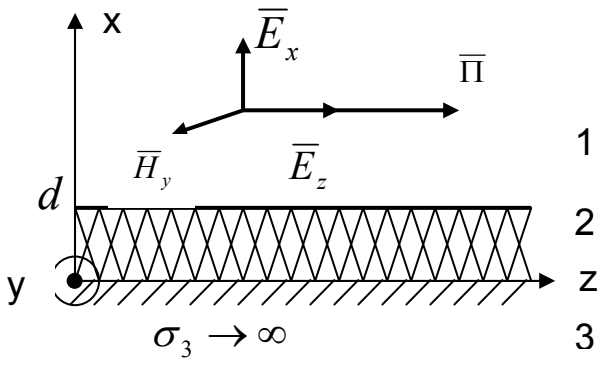


Рис. 2.4

Геометрия структуры показана на рис. 2.4, где приведены следующие обозначения:

Z – направление распространения волны;

среды обозначены соответствующими индексами:

- среда 1 – воздух (ε_1, μ_1),
- среда 2 – диэлектрик (ε_2, μ_2),
- среда 3 – идеальный проводник $\sigma \to \infty$;

d – толщина диэлектрика;

dYZ – неограниченная поверхность структуры;

$\overline{\Pi}$ – вектор Пойнтинга распространяющейся волны, причем рассматривается поперечно-магнитная волна (Е-волна, $E_z \neq 0$).

Компоненты волны определяются из заданного геометрического представления или формального математического описания.

Сравним волновые числа сред:

$$k_1 = \omega\sqrt{\varepsilon_1\mu_1}\ ; \qquad k_2 = \omega\sqrt{\varepsilon_2\mu_2}\ ;$$

$$\frac{k_2}{k_1} = \sqrt{\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}} \simeq \sqrt{\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_0}} = \sqrt{\varepsilon_{2r}}\ , \qquad (2.8)$$

причем $\mu_1 \simeq \mu_2 \simeq \mu_0$, так как воздух и диэлектрик – это немагнитные среды;

ε_{2r} – относительная диэлектрическая проницаемость диэлектрика.

Определим составляющие волн в средах 1, 2, а затем объединим поля с использованием граничных условий при *x* = *d*.

Поле в первой среде (воздух)

Алгоритм нахождения компонент волны:

1) решают волновое уравнение для продольной компоненты E_z;

2) определяют поперечные составляющие из уравнений взаимосвязи $E_x, H_y = f(E_z)$ или непосредственно из уравнений Максвелла.

Определим продольную компоненту $\dot{E}_{z1}$.

Волновое уравнение

$$\nabla^2 \dot{E}_{z1} + k_1^2 \dot{E}_{z1} = 0 \quad \text{при} \quad x \geq d. \tag{2.9}$$

Граничное условие $\dot{E}_{\tau 1} = \dot{E}_{\tau 2}$, т.е. $\dot{E}_{z1} = \dot{E}_{z2}$ при *x* = *d.*

По координате y поверхность не ограничена, поэтому полагаем, что $\frac{\partial}{\partial y} = 0$. В этом случае волновое уравнение (2.9) упрощается:

$$\frac{\partial^2 \dot{E}_{z1}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \dot{E}_{z1}}{\partial z^2} + k_1^2 \dot{E}_{z1} = 0. \tag{2.10}$$

Решение уравнения (2.10) можно записать так:

$$\dot{E}_{z1} = E_{z1}(x) e^{-jhz}. \tag{2.11}$$

Проведя замену

$$\frac{\partial^2 \dot{E}_{z1}}{\partial z^2} = -h^2 \dot{E}_{z1}$$

и обозначив $\gamma^2 = k_1^2 - h^2$, получим

$$\frac{d^2 \dot{E}_{z1}}{dx^2} + \gamma^2 \dot{E}_{z1} = 0. \tag{2.12}$$

Предположим, что $\gamma = jp$, тогда если поле будет существовать, то увеличение волнового числа

$$h^2 = k_1^2 - \gamma^2 = k_1^2 + p^2 \tag{2.13}$$

приведет к уменьшению фазовой скорости.

После сокращения на комплексную экспоненту (2.11) волновое уравнение относительно амплитуды примет следующий вид:

$$\frac{d^2E_{z1}}{dx^2} - p^2E_{z1} = 0. \qquad (2.14)$$

Решение уравнения запишем в виде

$$E_{z1} = Ae^{-px} + Be^{px},$$

принимая, что *B = 0*, так как второе слагаемое не удовлетворяет физическим условиям задачи. Переходим к комплексной амплитуде волны

$$\dot{E}_{z1} = Ae^{-px} \cdot e^{-jhz}, \qquad (2.15)$$

а затем к ее действительной форме

$$E_{z1}(t) = Ae^{-px} cos(\omega t - hz).$$

Отметим, что при некоторой координате $x_0 = \frac{1}{p}$ амплитуда уменьшается в *e* раз: $E_0(x_0) = Ae^{-1}$.

Определим поперечные составляющие волны E_x, H_y.

Эту задачу можно решить двумя методами:

1. Из уравнений взаимосвязи компонент волны (2.7) с заменой волнового числа $\gamma = jp$:

$$\dot{E}_{x1} = -j\frac{h}{\gamma^2} \cdot \frac{\partial \dot{E}_{z1}}{\partial x} = j\frac{h}{p^2} \cdot \frac{\partial \dot{E}_{z1}}{\partial x} \quad \text{при} \quad \dot{E}_{y_1} = 0, \qquad (2.16)$$

$$\dot{H}_{y1} = -j\frac{\omega\varepsilon}{\gamma^2} \cdot \frac{\partial \dot{E}_{z1}}{\partial x} = j\frac{\omega\varepsilon}{p^2} \cdot \frac{\partial \dot{E}_{z1}}{\partial x}.$$

Кроме того, $\dot{H}_{x1} = 0,$ так как $\frac{\partial \dot{E}_z}{\partial y} = 0.$

2. Из уравнений Максвелла

$$rot\dot{\bar{E}} = -j\omega\mu\dot{\bar{H}}, \qquad (2.17)$$

$$rot\dot{\bar{H}} = j\omega\varepsilon\dot{\bar{E}}.$$

Раскрывая операцию ротора в первом уравнении, т.е.

$$rot\dot{\bar{E}} = \begin{vmatrix} \bar{x}_0 & \bar{y}_0 & \bar{z}_0 \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \dot{E}_x & \dot{E}_y & \dot{E}_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \bar{x}_0 & \bar{y}_0 & \bar{z}_0 \\ \frac{\partial}{\partial x} & 0 & \frac{\partial}{\partial z} \\ \dot{E}_x & 0 & \dot{E}_z \end{vmatrix} = -\bar{y}_0\left(\frac{\partial \dot{E}_z}{\partial x} - \frac{\partial \dot{E}_x}{\partial z}\right),$$

с учетом того, что $\overline{H} = \bar{x}_0\dot{H}_x + \bar{y}_0\dot{H}_y + \bar{z}_0\dot{H}_z$, путем приравнивания обеих частей уравнения Максвелла (2.17), имеем

$$\frac{\partial \dot{E}_z}{\partial x} - \frac{\partial \dot{E}_x}{\partial z} = j\omega\mu\dot{H}_y .$$

Из второго уравнения Максвелла (2.17) получаем

$$rot\dot{\overline{H}} = \begin{vmatrix} \bar{x}_0 & \bar{y}_0 & \bar{z}_0 \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & 0 & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ 0 & \dot{H}_y & 0 \end{vmatrix} = -\dot{H}_y\left(\bar{x}_0\frac{\partial}{\partial z} - \bar{z}_0\frac{\partial}{\partial x}\right).$$

Приравнивая компоненты вектора в левой и правой частях уравнения с учетом того, что

$$\dot{\overline{E}} = \bar{x}_0\dot{E}_x + \bar{y}_0\dot{E}_y + \bar{z}_0\dot{E}_z ,$$

для компоненты $\bar{x}_0$ имеем

$$-\frac{\partial \dot{H}_y}{\partial z} = j\omega\varepsilon\dot{E}_x ,$$

а для компоненты $\bar{z}_0$ –

$$\frac{\partial \dot{H}_y}{\partial x} = j\omega\varepsilon\dot{E}_z .$$

Заменяем $\dfrac{\partial}{\partial z}$ на $-jh$. Тогда с учетом замены полученные уравнения примут вид

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \dot{E}_z}{\partial x} + jh\dot{E}_x = j\omega\mu\dot{H}_y , \\ jh\dot{H}_y = j\omega\varepsilon\dot{E}_x , \\ \dfrac{\partial \dot{H}_y}{\partial x} = j\omega\varepsilon\dot{E}_z . \end{cases}$$

Из второго уравнения данной системы находим выражение

$$\dot{H}_y = \frac{\omega\varepsilon}{h}\dot{E}_x$$

и подставляем его в первое:

$$\frac{\partial \dot{E}_z}{\partial x} = -jh\dot{E}_x + j\omega\mu\cdot\frac{\omega\varepsilon}{h}\dot{E}_x = j\dot{E}_x\left(\frac{k^2}{h} - h\right) = j\dot{E}_x\frac{\gamma^2}{h} .$$

Таким образом, из первого и второго уравнений системы получаем поперечные составляющие волны

$$\dot{E}_{x_1} = -j\frac{h}{\gamma^2}\cdot\frac{\partial \dot{E}_{z_1}}{\partial x} = j\frac{h}{p^2}\cdot\frac{\partial \dot{E}_{z_1}}{\partial x},$$

$$\dot{H}_{y_1} = \frac{\omega\varepsilon_1}{h}\dot{E}_{x_1} = j\frac{\omega\varepsilon_1}{p^2}\cdot\frac{\partial \dot{E}_{z_1}}{\partial x}. \qquad (2.18)$$

Поскольку с учетом (2.15)

$$\frac{\partial \dot{E}_{z_1}}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(Ae^{-px}\cdot e^{-jhz}\right) = (-p)\cdot \dot{E}_{z_1},$$

то окончательно составляющие волны в первой среде имеют вид

$$\begin{cases} \dot{E}_{z_1} = Ae^{-px}\cdot e^{-jhz}, \\ \dot{E}_{x_1} = -jA\dfrac{h}{p}e^{-px}\cdot e^{-jhz}, \\ \dot{H}_{y_1} = -jA\dfrac{\omega\varepsilon_1}{p}e^{-px}\cdot e^{-jhz}. \end{cases} \qquad (2.19)$$

Поле во второй среде (диэлектрик)

По аналогичной методике находим компоненты волны внутри второй (диэлектрической) среды.

Волновое уравнение для продольной компоненты

$$\nabla^2 \dot{E}_{z_2} + k_2^2 \dot{E}_{z_2} = 0 \quad \text{при} \quad 0 \le x \le d. \qquad (2.20)$$

Граничные условия

$$\dot{E}_{z_2} = 0 \text{ при } x = 0, \qquad \dot{E}_{z_1} = \dot{E}_{z_2} \text{ при } x = d$$

определяют непрерывность тангенциальной составляющей вектора $\overline{E}$ на границе раздела диэлектрических сред (*x* = *d*) и равенство её нулю на идеально проводящей поверхности (*x* = *0*).

Решение волнового уравнения (2.20) имеет вид

$$\dot{E}_{z_2} = E_{z_2}(x)e^{-jhz}.$$

Поскольку вдоль координаты y поле неизменно, то в лапласиане полагаем

$$\frac{\partial}{\partial y} = 0, \qquad \frac{\partial}{\partial z} = -jh.$$

Тогда после подстановки решения в уравнение (2.20) и сокращения на комплексную экспоненту, получаем

$$\frac{d^2 E_{z_2}}{dx^2} + g^2 E_{z_2} = 0, \qquad (2.21)$$

где $g^2 = k_2{}^2 - h^2$, или $g^2 = \varepsilon_{2r} k_1{}^2 - h^2$, причем $\varepsilon_{2r} > 1$, поэтому $g^2 > 0$.

Решение уравнения (2.21) имеет такой вид:

$$E_{z_2} = C\,cos(gx) + D\,sin(gx).$$

Подставляя граничное условие $E_\tau = E_{z_2} = 0$ при *x = 0,* имеем *C = 0.*

Тогда комплексная амплитуда продольной составляющей

$$\dot{E}_{z_2} = D\,sin(gx)e^{-jhz}. \qquad (2.22)$$

Поперечные компоненты определяем из условий взаимосвязи для воздушной среды (2.18):

$$\dot{E}_x = j\frac{h}{p^2}\cdot\frac{\partial \dot{E}_z}{\partial x}; \qquad \dot{H}_y = j\frac{\omega\varepsilon_1}{p^2}\cdot\frac{\partial \dot{E}_z}{\partial x}. \qquad (2.23)$$

Сравнивая взаимосвязи волновых чисел в воздушной среде и диэлектрике

$$k_1{}^2 - h^2 = \gamma^2 = (jp)^2, \quad k_2{}^2 - h^2 = g^2,$$

производим замену в компонентах волны (2.23):

$$jp \to g; \quad -p^2 \to g^2.$$

Уравнения взаимосвязи (2.23) примут вид

$$\begin{cases} \dot{E}_x = -j\dfrac{h}{g^2}\cdot\dfrac{\partial \dot{E}_z}{\partial x}, \\ \dot{H}_y = -j\dfrac{\omega\varepsilon_2}{g^2}\cdot\dfrac{\partial \dot{E}_z}{\partial x}. \end{cases}$$

Подставляя выражение для продольной компоненты (2.22), имеем составляющие волны во второй среде

$$\dot{E}_{z_2} = D\,sin(gx)e^{-jhz},$$

$$\dot{E}_{x_2} = -jD\frac{h}{g}cos(gx)e^{-jhz}, \qquad (2.24)$$

$$\dot{H}_{y_2} = -jD\frac{\omega\varepsilon_2}{g}cos(gx)e^{-jhz}.$$

Объединение полей в двух средах проводится на основании граничного условия $E_{\tau_1} = E_{\tau_2}$, $H_{\tau_1} = H_{\tau_2}$ при *x = d*, т.е.

$$\dot{E}_{Z_1} = \dot{E}_{Z_2}, \quad \dot{H}_{y_1} = \dot{H}_{y_2}.$$

Приравниваем соответствующие компоненты в двух средах на границе раздела (2.19), (2.24) при *x* = *d*:

$$\begin{cases} Ae^{-px} = D\,sin(gx); \\ -jA\dfrac{\omega\varepsilon_1}{p}e^{-px} = -jD\dfrac{\omega\varepsilon_2}{g}cos(gx). \end{cases}$$

Разделим первое уравнение на второе:

$$\frac{p}{\varepsilon_1} = \frac{g}{\varepsilon_2}tg(gd).$$

Поскольку $\dfrac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} = \varepsilon_{2r}$, то

$$p = \frac{1}{\varepsilon_{2r}}g \cdot tg(gd).$$

Это уравнение устанавливает взаимосвязь поперечных волновых чисел: p – в воздухе, g – в диэлектрике.

Второе уравнение получаем из треугольников волновых чисел в двух средах

$$\begin{cases} k_1^2 - h^2 = \gamma^2 = -p^2, \\ k_2^2 - h^2 = g^2. \end{cases}$$

Из второго уравнения вычитаем первое:

$$g^2 + p^2 = k_2^2 - k_1^2 = k_1^2\varepsilon_{2r} - k_1^2 = k_1^2(\varepsilon_{2r} - 1).$$

Система уравнений в безразмерных параметрах, определяющая поперечные волновые числа p, g, следующая:

$$\begin{cases} (pd) = \dfrac{1}{\varepsilon_{2r}}(gd)tg(gd); \\ (gd)^2 + (pd)^2 = R^2, \end{cases} \tag{2.25}$$

где $R = dk_1\sqrt{\varepsilon_{2r} - 1}$.

Для Н-волны уравнение взаимосвязи волновых чисел примет вид

$(pd) = -\dfrac{1}{\mu_{2r}}(gd)ctg(gd)$, причем $\mu_{2r} \approx 1$.

Если решение дисперсионной системы уравнений существует, то возможно высказанное ранее предположение, что поперечное волновое число мнимое ($\gamma = jp$), то есть фазовая скорость уменьшается: $\upsilon_ф \downarrow$.

Систему трансцендентных уравнений (2.25) можно решить численным методом или графически. Графическое решение системы приведено на рис. 2.5.

Анализируя систему уравнений, можно сделать следующие выводы:

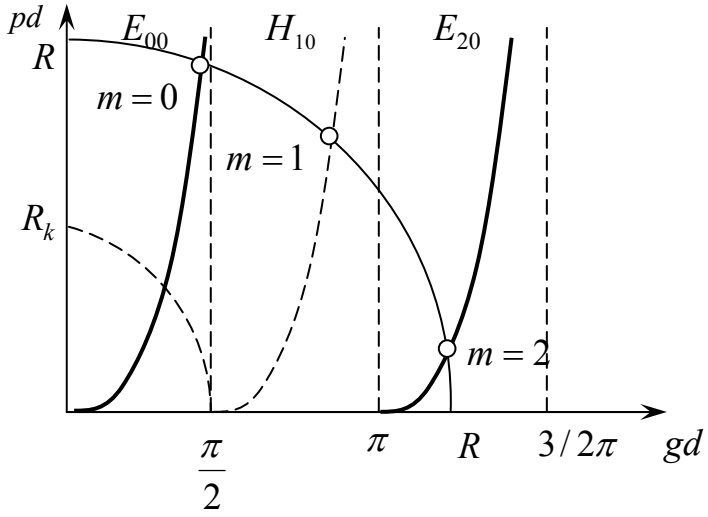


Рис. 2.5

1. Уравнение имеет несколько решений, которые определяют типы волн: E_{mn}, H_{mn}. Физическому смыслу задачи соответствует решение $p>0$, так как $E \sim e^{-px}$, поэтому отрицательные ветви функции tg не используются.

2. Чередование ветвей tg и ctg приводит к чередованию решений для Е- и Н-волн, а m – порядковый номер решения, причем

$$m=0,2,4,... \text{ для } E_{mn} \quad \text{и} \quad m=1,3,5,... \text{ для } H_{mn}.$$

Поскольку вдоль координаты y изменения поля нет, то следует принять $n=0$. Поэтому типы волн имеют такие обозначения: $E_{00,}H_{10},E_{20},...$.

3. Максимальный индекс $m_{\max}$ определяется как отношение радиуса к величине интервала π/2:

$$m_{\max}=\left[\frac{R}{\frac{\pi}{2}}\right]=\left[\frac{k_1 d\sqrt{\varepsilon_{2r}-1}}{\frac{\pi}{2}}\right]=\left[\frac{\frac{2\pi}{\lambda}d\sqrt{\varepsilon_{2r}-1}}{\frac{\pi}{2}}\right],$$

или

$$m_{\max}=\left[\frac{4d}{\lambda}\sqrt{\varepsilon_{2r}-1}\right], \qquad (2.26)$$

где [ ] – символ выделения целой части.

4. Критическая длина волны λ_k находится из соотношения волновых чисел

$$h = \sqrt{k^2 + p^2}$$

для критического случая $p = 0$, т. е. $h = k$ (замедления нет). Для этого варианта уравнение

$$(gd)^2 + (pd)^2 = R^2$$

принимает вид $gd = R_k$ – критический случай (см. рис. 2.5). Тогда вдоль критического радиуса должно укладываться целое число интервалов π/2:

$$m\frac{\pi}{2} = R_k \text{, т.е.} \quad dk_1\sqrt{\varepsilon_{2r} - 1} = m\frac{\pi}{2}.$$

Учитывая выражение для волнового числа $k_1 = \dfrac{2\pi}{\lambda_k}$, получаем формулу для критической длины волны

$$\lambda_k = \frac{4d}{m}\sqrt{\varepsilon_{2r} - 1}. \qquad (2.27)$$

Основной волной является волна типа E_{00}, т. к. при *m = 0* имеем $\lambda_{\max} = \infty$, т.е. $\omega_k = 0$.

5. Критическое значение толщины диэлектрика вычисляется из условия обеспечения одномодового режима.

Для данного типа волны (индекс m) могут распространяться волны, которые удовлетворяют условию $\lambda < \lambda_k$, т.е.

$$\lambda < \frac{4d}{m}\sqrt{\varepsilon_{2r} - 1}.$$

Отсюда следует, что основной тип волны ($m = 0$) не критичен к минимальной толщине диэлектрика. С увеличением толщины диэлектрика нарушается одномодовый режим, так как появляется более высокий тип волны ($m = 1$). Для сохранения одномодового режима толщина диэлектрика должна быть ограничена:

$$d_{\max} < \frac{\lambda}{4\sqrt{\varepsilon_{2r} - 1}}. \qquad (2.28)$$

6. Коэффициент замедления $K_З$ определяется отношением фазовых скоростей в свободном пространстве и замедляющей структуре:

$$K_З = \frac{C}{\upsilon_Ф}.$$

Выразив фазовые скорости через волновые числа

$$C = \frac{\omega}{k}, \qquad \upsilon_{\text{ф}} = \frac{\omega}{h},$$

получим еще одну расчетную формулу для указанного параметра

$$K_{\text{з}} = \frac{h}{k}.$$

Экспериментальный метод определения коэффициента замедления заключается в создании режима стоячей волны и последующем измерении длины медленной волны $\lambda_в$ (рис. 2.6). Переходя от волновых чисел к соответствующим длинам волн

$$k = \frac{2\pi}{\lambda}, \qquad h = \frac{2\pi}{\lambda_{\text{в}}},$$

получаем необходимую расчетную формулу

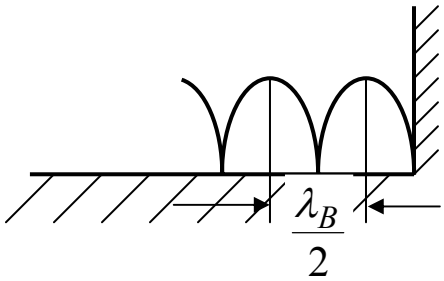


Рис. 2.6

$$K_{\text{з}} = \frac{\lambda}{\lambda_в}, \tag{2.29}$$

где λ – длина волны генератора.

Теоретический метод расчета коэффициента замедления основан на определении поперечного волнового числа p с последующим вычислением

$$K_{\text{з}} = \frac{h}{k} = \frac{\sqrt{k^2 + p^2}}{k^2}, \quad \text{т.е.} \qquad K_{\text{з}} = \sqrt{1 + \left(\frac{p}{k}\right)^2}. \tag{2.30}$$

Волновое число p является результатом решения системы уравнений (2.25) при заданных исходных данных: d, λ, ε_{2r}.

Выводы:

1. Для уменьшения фазовой скорости$\downarrow \upsilon_ф$ нужно увеличивать продольное волновое число$\uparrow h$, так как

$$\upsilon_ф = \frac{\omega}{h}.$$

2. Продольное волновое число можно изменить за счет поперечного волнового числа γ, так как

$$k^2 = h^2 + \gamma^2.$$

При этом поперечное волновое число должно быть мнимым ($\gamma = jp$) для обеспечения эффекта замедления, т.е.

$$h^2 = k^2 - \gamma^2 = k^2 + p^2.$$

3. Мнимый характер поперечного волнового числа приводит к затуханию амплитуды поля вдоль нормальной координаты по закону экспоненты $E(x) = E_0 e^{-px}$ (рис. 2.7). Тогда волна имеет поверхностный характер, т.е. «прижимается» к плоскости замедляющей структуры.

4. Затухание поля по нормальной координате соответствует мнимому характеру вектора Пойнтинга вдоль этого направления:

$$\dot{\overline{\Pi}}_{\perp} = \frac{1}{2}\left(\dot{\overline{E}}_{\tau} \times \dot{\overline{H}}_{\tau}^{*}\right) = \frac{1}{2}\left(\dot{\overline{E}}_{z} \times \dot{\overline{H}}_{y}^{*}\right) = \frac{1}{2} E_0^2 \left(j\frac{\omega\varepsilon_2}{p} \right) \cdot e^{-2px} \overline{x}_0 =$$

$$= \frac{1}{2} E_0 \cdot \frac{E_0}{Z_S^*} e^{-2px} \overline{x}_0,$$

где $Z_S^* = \dfrac{p}{j\omega\varepsilon_2}$.

Среднее значение вектора Пойнтинга $\overline{\Pi}_{1cp} = \mathrm{Re}\,\dot{\overline{\Pi}}_1 = 0$, что свидетельствует об отсутствии переноса энергии вдоль этого направления.

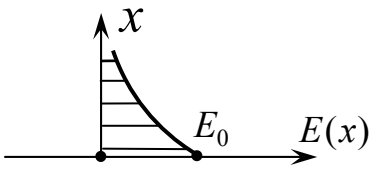


Рис. 2.7

5. Поскольку нормальная составляющая вектора Пойнтинга имеет мнимый характер, то тангенциальные компоненты поля E_τ *и* H_τ должны быть сдвинуты во времени по фазе на $\dfrac{\pi}{2}$:

$$\dot{E}_\tau = Z_s \dot{H}_\tau = j|Z_s|\dot{H}_\tau .$$

6. Тангенциальные составляющие E_τ *и* H_τ определяют поверхностное сопротивление замедляющей структуры:

$$Z_s = \frac{\dot{E}_z}{\dot{H}_y}, \qquad \text{т.е.} \qquad Z_s = \frac{\dot{E}_\tau}{\dot{H}_\tau} = \frac{1}{-j\dfrac{\omega\varepsilon_2}{p}} = j\frac{p}{\omega\varepsilon_2}. \qquad (2.31)$$

Следовательно, для уменьшения фазовой скорости $\downarrow \upsilon_{ф}$ поверхностное сопротивление структуры должно иметь реактивный (индуктивный) характер. Такие поверхности называются импедансными поверхностями с распределенным поверхностным сопротивлением.

7. Поперечное волновое число должно быть положительным (*p>0)*, иначе при $p < 0$ поле вдоль нормальной координаты будет возрастать ($E \sim E_0 e^{-px}$), что не соответствует физической сущности задачи. Поэтому поверхностное сопротивление Z_s для Е-волны должно быть индуктивным, а не емкостным.

8. Уменьшение длины волны генератора приводит к увеличению поперечного волнового числа ($\lambda\downarrow,\ p\uparrow$), так как возрастает радиальный параметр $\uparrow R=\dfrac{2\pi}{\lambda}d\sqrt{\varepsilon_{2r}-1}$ (см. рис. 2.5). Тогда почти вся волна распространяется внутри диэлектрика ($E=E_0e^{-px}$), что увеличивает потери. При увеличении длины волны генератора ($\lambda\uparrow, p\downarrow$) волна теряет поверхностный характер ($K_з\to 1$), т.е. эффект замедления уменьшается.

9. При увеличении толщины диэлектрика $d\uparrow$ возрастает радиальный параметр $\uparrow R$, поэтому увеличивается поперечное волновое число$\uparrow p$, т.е. волна сильнее «прижимается» к диэлектрику (E_0e^{-px}). В этом случае возможно также нарушение одномодового режима работы.

При уменьшении толщины диэлектрика $d\downarrow$ в пределе переходим к структуре воздух–металл. В такой структуре вдоль нормальной координаты поле становится периодическим и имеет характер стоячей волны.

2.3. Гребенчатая замедляющая структура

Структура с пространственной периодичностью имеет реактивное поверхностное сопротивление, что обеспечивает эффект замедления электромагнитной волны. Продольное сечение структуры и тип волны приведены на рис. 2.8.

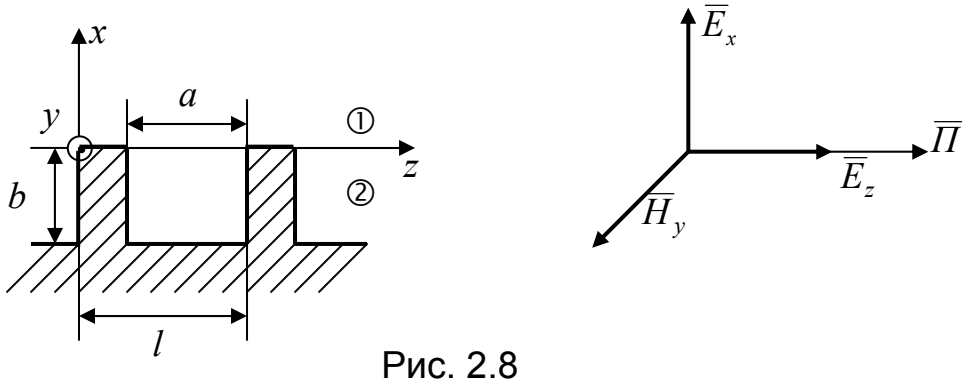


Рис. 2.8

Анализ указанной структуры включает в себя следующие этапы:

- определение продольной компоненты волны E_{z_1} из волнового уравнения;

- вычисление поперечных компонент волны E_{x_1}, H_{y_1} из уравнений взаимосвязи поперечных компонент через продольные или урав-

нений Максвелла;

- определение компонент стоячей волны $\overline{E}_z, \overline{H}_z$ внутри паза;

- объединение полей в первой и второй средах в плоскости гребенки на основании граничных условий при $x = 0$;

- определение поперечного p_1 и продольного h волновых чисел;

- вычисление фазовой скорости $\upsilon_ф = \dfrac{\omega}{h}$ и коэффициента замедления $K_З = \dfrac{C}{\upsilon_Ф}$.

Комплексная амплитуда направляемой волны над периодической структурой имеет следующий вид:

$$\dot{E} = \dot{E}_m(x, y, z)e^{-jhz}. \qquad (2.32)$$

Некоторые особенности этой волны:

1. Зависимость амплитуды от поперечных пространственных координат волны $f(x, y)$ определяется пространственной ограниченностью структуры по этим координатам, то есть граничными условиями. По координате y структура не ограничена, поэтому остается зависимость только от одной координаты $f(x)$.

2. Зависимость амплитуды от продольной координаты $f(z)$ определяется пространственной периодичностью структуры, при этом над структурой существует совокупность пространственных гармоник (в соответствии с теоремой Флоке).

Периодическая функция

$$E_m(x, z + l) = E_m(x, l)$$

раскладывается в ряд Фурье по пространственным гармоникам:

$$\dot{E}_m(x, z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \dot{E}_n(x) \cdot e^{-jn\frac{2\pi}{l}z},$$

где по аналогии с временной гармоникой $e^{jk\omega t} = e^{jk\frac{2\pi}{T}t}$ вводится понятие пространственной гармоники $e^{jn\omega_z z} = e^{jn\frac{2\pi}{l}z}$.

При переходе от временной гармоники к пространственной следует выполнить замены:

$$\omega \to \omega_z, \quad T \to l, \quad t \to z.$$

Комплексная амплитуда волны над замедляющей структурой представляет собой совокупность пространственных гармоник:

$$\dot{E} = \dot{E}_m(x, z)e^{-jhz} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \dot{E}_n(x)e^{-j\left(h + \frac{2\pi n}{l}\right)z},$$

где $\gamma_n = h + n\dfrac{2\pi}{l}$ – волновое число *n*-й гармоники.

Основная волна соответствует значению *n* = 0 и имеет максимальную амплитуду, минимальное волновое число и максимальную фазовую скорость. Комплексная амплитуда такой волны

$$\dot{E} \approx E_1(x)e^{-jhz}.$$

Дальнейшее решение проводится для основной гармоники.

Волновое уравнение для продольной координаты

$$\nabla^2 \dot{E}_{z1} + k^2 \dot{E}_{z1} = 0 \quad \text{при } x \geq b, \qquad -\infty \leq y \leq \infty. \tag{2.33}$$

Решение уравнения имеет вид

$$\dot{E}_{z1} = E_0(x)e^{-jhz}. \tag{2.34}$$

Заменяя вторые производные в лапласиане

$$\frac{\partial^2}{\partial y^2} = 0, \quad \frac{\partial^2}{\partial z^2} = (-jh)^2,$$

получаем одномерное волновое уравнение

$$\frac{d^2 \dot{E}_{z1}}{dx^2} + \gamma^2 \dot{E}_{z1} = 0, \tag{2.35}$$

где $\gamma^2 = k^2 - h^2$.

Условие замедления для поперечного волнового числа $\gamma = jp$. Тогда волновое уравнение относительно амплитуды волны (после сокращения на экспоненту) принимает следующий вид:

$$\frac{d^2 E_0}{dx^2} - p^2 E_0 = 0. \tag{2.36}$$

Это уравнение имеет решение

$$E_0 = Ae^{-px},$$

тогда комплексная амплитуда продольной компоненты (2.34)

$$\dot{E}_{z1} = Ae^{-px}e^{-jhz}. \tag{2.37}$$

Используя уравнение взаимосвязи продольной и поперечной компонент

$$\dot{H}_{y1} = -j\frac{\omega\varepsilon}{\gamma^2} \cdot \frac{\partial \dot{E}_z}{\partial x} = j\frac{\omega\varepsilon}{p^2} \cdot \frac{\partial \dot{E}_z}{\partial x},$$

определим поперечную магнитную компоненту

$$\dot{H}_{y1} = -jA\frac{\omega\varepsilon}{p}e^{-px} \cdot e^{-jhz}. \tag{2.38}$$

Второе уравнение взаимосвязи компонент

$$\dot{E}_{x1} = -j\frac{h}{\gamma^2}\cdot\frac{\partial\dot{E}_z}{\partial x} = j\frac{h}{p^2}\cdot\frac{\partial\dot{E}_z}{\partial x}$$

задает поперечную электрическую компоненту

$$\dot{E}_{x1} = -jA\frac{h}{p}\cdot e^{-px}\cdot e^{-jhz}. \qquad (2.39)$$

Компоненты поля внутри паза гребенки

Геометрия паза гребенки и компоненты волны, распространяющейся над замедляющей структурой, приведены на рис. 2.9.

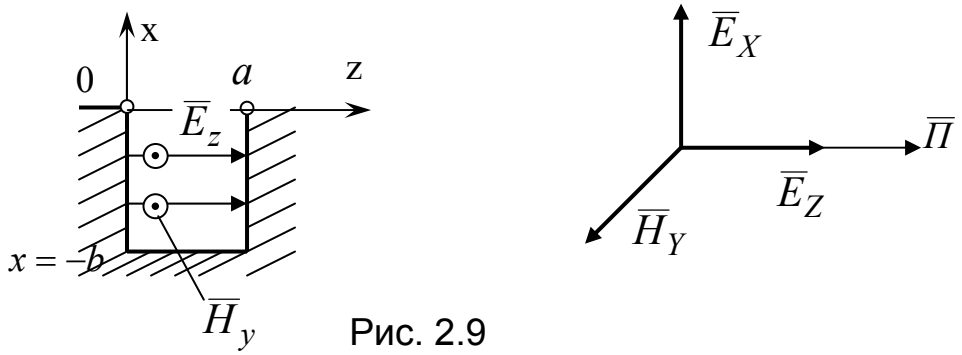


Рис. 2.9

Поле внутри паза имеет следующие особенности:

1. Волна, распространяющаяся над гребенкой, возбуждает внутри паза электромагнитное поле.

2. Поскольку ширина паза $a << \lambda$, то внутри паза вдоль координаты z поле можно считать неизменным:

$$E(z) \approx const;$$

$$H(z) \approx const,$$

причем компонента поля $E_{x2} = 0$, так как по граничным условиям на боковых стенках паза в координатах $z = a,\ z = 0$ $E_{x2} = 0,$ но $E(z) \approx const$.

3. Поле внутри паза вдоль координаты x распределено по закону стоячей волны. Стоячую волну можно рассматривать как результат суперпозиции вдоль координаты x падающей и отраженной волн типа ТЕМ (рис. 2.10), в которой имеются две компоненты: $E_{z2},\ H_{y2}$.

Суммируя падающую и отраженную волны, получаем

$$\dot{E}_{z2} = \dot{E}_{пад} + \dot{E}_{отр} = B\left(e^{jkx} + \rho e^{-jkx}\right);$$

$$\dot{H}_{y2} = \dot{H}_{пад} + \dot{H}_{отр} = \frac{B}{Z_c}\left(e^{jkx} - \rho e^{-jkx}\right),$$

где $\rho = \dfrac{\dot{E}_{отр}}{\dot{E}_{пад}}$ – коэффициент отражения;

$Z_c = \dfrac{k}{\omega\varepsilon} = \sqrt{\dfrac{\mu}{\varepsilon}}$ – волновое сопротивление ТЕМ-волны.

Применим граничное условие вдоль продольной координаты паза $E_{z2} = E_\tau = 0$ при $x = -b$, что соответствует коэффициенту отражения $\rho = -1$, тогда компоненты поля внутри паза

$$\dot{E}_{z2} = 2jB\,sin(kx), \qquad \dot{H}_{y2} = 2\frac{B}{Z_c}cos(kx). \tag{2.40}$$

Поверхностное сопротивление над пазом

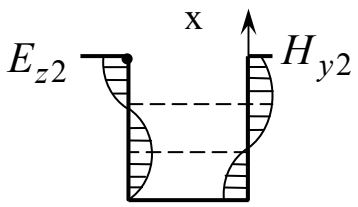


Рис. 2.10

$$Z_{s_2} = \left.\frac{\dot{E}_{z2}}{\dot{H}_{y2}}\right|_{x=b} = jZ_c tg(kb) \tag{2.41}$$

зависит от глубины паза (см. рис. 2.10), а поверхностное сопротивление со стороны первой среды определяется выражением

$$Z_{s1} = \frac{\dot{E}_{z1}}{\dot{H}_{y1}} = j\frac{p}{\omega\varepsilon}. \tag{2.42}$$

Объединение полей

При малой толщине стенок паза, т.е. $(l-a) << l$, поля в двух средах можно объединить, применяя граничное условие равенства тангенциальных компонент в координате $x = 0$

$$\dot{E}_{z1} = \dot{E}_{z2}, \qquad \dot{H}_{y1} = \dot{H}_{y2}.$$

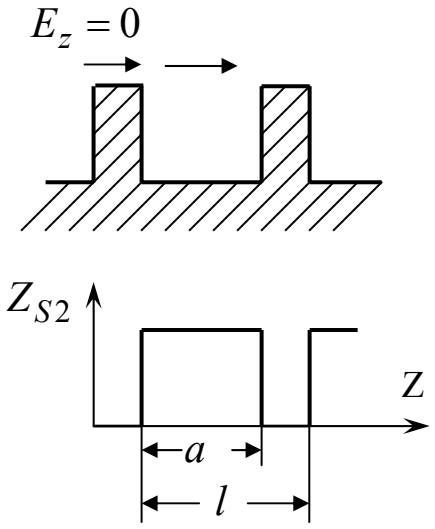


Рис. 2.11

При конечной толщине стенок граничное условие зависит от продольной координаты z, принимая нулевое значение над стенкой паза и сохраняя конечную величину над самим пазом (рис. 2.11).

Поверхностное сопротивление также не является постоянным, а представляет собой периодическую функцию вдоль продольной координаты с периодом, равным пространственному периоду гребенки (см. рис. 2.11).

Среднее значение поверхностного сопротивления определяется в результате усреднения по пространственному периоду функции:

$$Z_{s2\,cp} = \frac{1}{l}\int_0^a Z_{s2}dz = \frac{1}{l}\int_0^a jZ_c tg(kb)dz = j\frac{a}{l}Z_c tg(kb). \qquad (2.43)$$

В случае конечной толщины стенок паза «сшивание» полей в первой и второй средах осуществляют путем приравнивания волновых сопротивлений (2.42), (2.43):

$$Z_{s1} = Z_{s2\,cp}, \quad \text{т.е.} \quad jp\frac{1}{\omega\varepsilon} = j\frac{a}{l}\cdot\frac{k}{\omega\varepsilon}tg(kb).$$

Выражение для поперечного волнового числа можно получить из последнего выражения:

$$p = k\frac{a}{l}tg(kb). \qquad (2.44)$$

Коэффициент замедления

$$K_з = \frac{c}{\upsilon_ф}$$

с учетом фазовых скоростей

$$\upsilon_ф = \frac{\omega}{h}, \quad c = \frac{\omega}{k}$$

примет вид

$$K_з = \frac{h}{k} = \frac{\sqrt{k^2+p^2}}{k} = \sqrt{1+\left(\frac{p}{k}\right)^2}.$$

Подставляя в это выражение формулу (2.44), получаем коэффициент замедления, выраженный через геометрические параметры гребенки:

$$K_з = \sqrt{1+\left[\frac{a}{l}tg(kb)\right]^2}. \qquad (2.45)$$

Зависимость коэффициента замедления от безразмерной глубины паза приведена на рис. 2.12.

Поскольку комплексная амплитуда волны

$$\dot{E} = Ae^{-px}\cdot e^{-jhz},$$

то поперечное волновое число должно быть положительным ($p>0$). Поэтому $tg(kb)>0$, так как $p = k\frac{a}{l}tg(kb)$. Тогда полосы замедления чередуются с полосами отсечки (см. рис. 2.12).

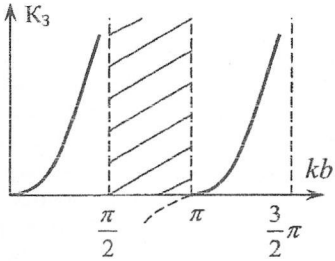


Рис. 2.12

При увеличении глубины паза индуктивный характер поверхностного со-

противления Z_s меняется на емкостный, что соответствует $p < 0$, т.е. медленная волна отсутствует (режим отсечки). Граничное значение глубины паза определяется из первого интервала (см. рис. 2.12)

$$kb \le \frac{\pi}{2}, \quad \text{т.е.} \quad \frac{2\pi}{\lambda} b \le \frac{\pi}{2},$$

откуда глубина паза гребенки составляет $b \le \frac{\lambda}{4}$.

Библиографический список

1. Никольский В.В. Электродинамика и распространение радиоволн / В.В. Никольский. – М.: Наука, 1973. – 607 с.
2. Гольдштейн Л.Д. Электромагнитные поля и волны / Л.Д. Гольдштейн, Н.В. Зернов. – М.: Сов. радио, 1971. – 664 с.
3. Григорьев А.Д. Электродинамика и техника СВЧ / А.Д. Григорьев. – М.: Высш. шк., 1990. – 335 с.
4. Барсуков С.Н. Электромагнитные волны в направляющих структурах: учеб. пособие / С.Н. Барсуков – Х.: Нац. аэрокосм. ун-т «Харьк. авиац. ин-т», 2007. – 58 с.

Оглавление

1. Объемные резонаторы..... 3
   1.1. Структура поля прямоугольного резонатора..... 3
   1.2. Поверхностные токи колебания H_{10P}..... 12
   1.3. Собственная добротность резонатора..... 14
   1.4. Разновидности резонаторов..... 20
      1.4.1. Цилиндрический резонатор..... 20
      1.4.2. Квазистационарные резонаторы..... 24
      1.4.3. Коаксиальный резонатор..... 27
      1.4.4. Открытые резонаторы..... 29
2. Замедляющие структуры..... 32
   2.1. Фазовая скорость и возможности ее уменьшения..... 32
   2.2. Диэлектрическая замедляющая структура..... 35
   2.3. Гребенчатая замедляющая структура..... 46
Библиографический список..... 52