

В.И. Картунов, В.В. Лукин

ОСНОВЫ ТЕОРИИ ЦИФРОВОЙ СВЯЗИ

2006

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ УКРАИНЫ
Национальный аэрокосмический университет им. Н.Е. Жуковского
«Харьковский авиационный институт»

В.И. Картунов, В.В. Лукин

ОСНОВЫ ТЕОРИИ ЦИФРОВОЙ СВЯЗИ

Учебное пособие по лабораторному практикуму

Харьков «ХАИ» 2006

681. 396

Основы теории цифровой связи / В.И. Кортунов, В.В. Лукин. - Учеб. пособие по лаб. практикуму. – Харьков: Нац. аэрокосм. ун-т «Харьк. авиац. ин-т», 2006. – 65 с.

Рассмотрены модели сигналов, элементов системы связи и каналов связи. Изложены методы спектрального анализа сигналов и элементов системы связи, методы исследования свойств сигналов, прошедших через каналы связи с различными свойствами. Описаны основные функции и команды системы МАТЛАБ как инструментального средства анализа и синтеза систем связи.

Для студентов специальности “Телекоммуникационные системы и сети” при изучении курсов “Основы теории цифровой связи”, „Обработка информации в цифровых системах связи”, а также при выполнении курсовых и бакалаврских работ.

Ил. 4. Табл. 11. Библиогр.: 7 назв.

Рецензенты: д-р техн. наук В.М. Безрук,
 д-р техн. наук, проф. Г.П. Кулемин

© Национальный аэрокосмический университет им. Н.Е. Жуковского
«Харьковский авиационный институт», 2006

ОГЛАВЛЕНИЕ

| | |
|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----|
| Введение..... | 5 |
| 1. Сигналы и их характеристики..... | 7 |
| 1.1. Общие сведения о сигналах..... | 7 |
| 1.1.1. Классификация сигналов..... | 8 |
| 1.1.2. Специальные сигналы..... | 9 |
| 1.2. Детерминированные аналоговые сигналы и их характеристики...10 | |
| 1.2.1. Свойства и характеристики непрерывных сигналов.....11 | |
| 1.2.2. Спектральные характеристики сигналов. Ряд Фурье.....11 | |
| 1.2.3. Спектр периодического сигнала.....12 | |
| 1.2.4. Спектр непериодического сигнала. Преобразование Фурье..13 | |
| 1.2.5. Свойства преобразования Фурье | 13 |
| 1.2.6. Энергетические характеристики сигналов.....14 | |
| 1.3. Детерминированные цифровые сигналы и их характеристики.....15 | |
| 1.3.1. Устройства дискретизации и квантования сигналов.....15 | |
| 1.3.2. Математическая модель цифровых сигналов.....16 | |
| 1.3.3. Связь спектров непрерывных и дискретных сигналов.....16 | |
| 1.3.4. Теорема отсчетов А.В. Котельникова.....17 | |
| 1.3.5. Дискретное преобразование Фурье.....17 | |
| 1.3.6. Z-преобразование дискретных сигналов.....19 | |
| 1.4. Случайные сигналы и их характеристики.....21 | |
| 1.4.1. Понятие случайной функции и случайного процесса.....21 | |
| 1.4.2. Характеристики случайного процесса.....25 | |
| 1.4.3. Перечень функций для вычисления характеристик в МАТЛАБе..... | 27 |
| 2. Преобразование сигналов в элементах и системах связи..... | 28 |
| 2.1. Формы динамических моделей каналов связи | 28 |
| 2.2. Способы получения динамических моделей | 30 |
| 2.3. Виды стохастических моделей каналов..... | 30 |
| 2.4. Преобразование детерминированных сигналов линейными непрерывными системами. Временные характеристики систем..... | 31 |

| | |
|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----|
| 2.5. Преобразование детерминированных сигналов линейными непрерывными системами в частотной области..... | 33 |
| 2.6. Элементарные звенья систем и их свойства | 35 |
| 2.7. Условие неискаженного воспроизведения сигнала | 40 |
| 2.8. Характеристики идеального фильтра низких частот | 40 |
| 2.9. Преобразование случайных сигналов линейными системами..... | 41 |
| 2.10. Постановка задачи оптимальной фильтрации..... | 42 |
| 2.11. Решение задачи оптимальной фильтрации в классе идеальных фильтров с ограниченной полосой пропускания..... | 43 |
| 2.12. Решение задачи оптимальной фильтрации | 44 |
| 3. Основные функции анализа сигналов в среде МАТЛАБ | 45 |
| 3.1. Функции генерации сигналов..... | 45 |
| 3.2. Функции дискретного преобразования Фурье (табл. 3.7)..... | 47 |
| 3.3. Функции анализа непрерывных систем в частотной области (табл. 3.8)..... | 48 |
| 3.4. Функции задания линейного фильтра..... | 48 |
| 4. Лабораторные работы | 49 |
| Лабораторная работа № 1. Изучение инструментальных средств моделирования сигналов в среде МАТЛАБ..... | 49 |
| Лабораторная работа № 2. Дискретное преобразование Фурье с помощью инструментальных средств МАТЛАБ | 52 |
| Лабораторная работа № 3. Дискретное обратное преобразование Фурье и фильтрация сигналов | 55 |
| Лабораторная работа № 4. Определение характеристик случайных сигналов | 58 |
| Лабораторная работа № 5. Определение характеристик линейных стационарных систем с помощью инструментальных средств МАТЛАБ ... | 61 |
| Библиографический список | 64 |

Особенность систем цифровой связи состоит в том, что в основе переданной информации лежит конечный набор дискретных сообщений, тогда как в системах аналоговой связи сообщения всегда непрерывные. В этом случае изменится и задача приемника цифровой системы. Она заключается не в точном воспроизведении переданного сигнала, а в определении, к какому из конечного набора известных сигналов относится принятый сигнал.

Системы цифровой связи интенсивно развиваются вследствие следующих преимуществ:

1. Высокая помехозащищенность и слабая зависимость качества передачи от длины линии связи в результате использования в канале связи регенеративных ретрансляторов, кроме того, наличие двух состояний принимаемого сигнала исключает накопление шумов и других возмущений. В аналоговых системах даже наличие небольших возмущений может привести к значительному искажению сигнала.

2. Стабильность параметров каналов связи цифровых систем передачи, которая обеспечивается устранением эффектов ухудшения качества сигнала в канале связи. Такое устранение или выравнивание выполняется устройствами компенсации или эквалайзерами, легко реализуемыми в цифровых системах связи.

3. Эффективное использование пропускной способности каналов цифровых систем связи при передаче дискретных сообщений на основе применения временного или кодового разделения каналов.

4. Высокие технико-экономические показатели из-за малых габаритных размеров, массы, высокой унификации узлов и надежности системы и, самое важное, цифровые системы могут производиться по более низким ценам.

Теория связи как совокупность методов решения задач синтеза и анализа систем связи служит для исследования и разработки различных систем связи.

Основная задача системы связи – обеспечение передачи и приема сообщения из условия минимального или необходимого уровня искажения формы входного сообщения. Одна из задач теории связи заключается в анализе существующих или проектируемых систем в целях установления свойств и соответствия их техническому заданию.

К задачам синтеза относят несколько противоположные задачи: нахождение принципов, законов и способов построения таких систем, а также отдельных подсистем для достижения требуемых свойств. Критерии синтеза: производительность системы (количество абонентов), вероятность безошибочного приема сигнала, стоимость или габаритные размеры, степень искажения принимаемого сигнала и др. Если система связи синтезирована наилучшим способом по определенному критерию, то она называется оптимальной. К задачам теории связи относят и частные задачи: фильтрация и обнаружение сигнала, кодирование сообщения, выравнивание характеристики канала, обеспечение различных видов синхронизации и др.

В литературе выделяют следующие задачи теории связи: выполнение функций обработки сигналов (форматирование и кодирование источника); передача широкополосных (видео) и узкополосных (полосовых) сигналов; выравнивание (коррекция) характеристик каналов связи; канальное кодирование; уплотнение и множественный доступ каналов; расширение спектра; синхронизация в системах связи. Решение перечисленных задач базируется на фундаменте теории связи – теории сигналов.

Дисциплина «Теория цифровой связи» основывается на таких предметах: высшая математика, основы радиотехники, основы теории связи, и является базовым предметом в профессионально-ориентированных дисциплинах.

1.

1.1.

Рассмотрим сигналы в контексте систем связи как средства реализации различных связей. Типовая система цифровой связи состоит из отправителя сообщения, канала связи и получателя сообщения.

Канал связи включает в себя передатчик (модулятор), линию связи и приемник (демодулятор).

предназначен для преобразования сообщений в сигналы, проходящие по линии связи.

– для восстановления переданного сообщения по принятому сигналу.

– совокупность технических средств и линий связи, необходимых для передачи сообщений и сигналов.

– физическая среда, в которой распространяются сигналы.

– физический процесс, протекающий во времени и несущий информацию о каком-либо событии, состоянии объекта либо передающий команды управления, указания, оповещения.

Сигнал в переводе с греческого языка означает «сигнум-знак». В прямом понимании сигналы – это знаки, обозначающие оговоренные заранее действия. Знаки-сигналы – знак светофора, буквы, слова, рисунки и др. Источниками сигнала могут быть явления, вызывающие появление сигнала. Носители сигнала – колебание, излучение, электрический ток и др. Существуют индикаторный и математический способы представления сигналов. Индикаторный – связан с отождествлением формы, цвета, вида движения и др. Математический – со способом представления функций (табличный, графический или аналитический) и используется как математическая модель сигнала.

1.1.1.

При классификации сигналов выделяют признаки и соответствующие им виды сигналов, примеры которых представлены в табл. 1.1.

Таблица 1.1

| | |
|----------------------------|---------------------------------------------------------------------------|
| Природа сигнала | Детерминированный - случайный |
| Периодичность | Периодический - непериодический (аперриодический) |
| Энергия сигнала | Ограниченный - неограниченный по энергии |
| Частотные свойства | Ограниченный - неограниченный по частоте Узкополосный - широкополосный |
| Временные свойства | Ограниченный - неограниченный по времени |
| Квантованность | Непрерывный - дискретный (цифровой) |
| Форма представления | Комплексный - действительный |
| По стабильности параметров | Стационарный - нестационарный |
| По особенности применения | Специальные сигналы |

называется такой сигнал, значение или величина которого для некоторого момента времени неизменна и может быть выражена математической функцией аргумента времени.

– сигнал, значение или величина которого для некоторого момента времени есть случайная величина с вероятностными характеристиками.

– сигнал, аргумент и значение которого принадлежат непрерывным множествам.

– сигнал, для которого выполняется равенство $x(t+T) = x(t)$ для любого момента времени из области его определения для минимального T – периода.

– сигнал, значения которого принадлежат счетному (дискретному) множеству.

– сигнал, аргумент которого принадлежит счетному (дискретному) множеству.

– сигнал, являющийся квантованным и дискретным.

Сигнал, для которого справедливо неравенство $\int_{-\infty}^{\infty} (x(t))^2 dt < \infty$, называется

ся по энергии.

– сигнал, отличный от нуля на конечном интервале, а конечные значения сигнала на данном интервале стремятся к нулю.

– сигнал, отличный от нуля при времени $t > t_0$.

– это сигнал, у которого амплитудный спектр отличен от нуля на конечном интервале частот.

– сигнал, у которого параметры неизменны во времени.

1.1.2.

К относят сигналы, используемые в практике синтеза и анализа систем связи. Виды специальных сигналов и их команды генерации в системе МАТЛАБ представлены в табл. 1.2.

Таблица 1.2

| | () | |
|---------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| Единичный ступенчатый сигнал | $x(t) = 1(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ 0.5, & t = 0 \\ 1, & t > 0 \end{cases}$ | >> y = (t > 0); |
| Импульсная функция Дирака | $\delta(t) = \begin{cases} = 0, & t \neq 0 \\ \neq 0, & t = 0 \end{cases}$ $\int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) \delta(\tau - t) dt = f(t)$ | - |
| Дискретная импульсная функция | $\delta(k - l) = \begin{cases} = 1, & k = l \\ = 0, & k \neq l \end{cases}$ | - |
| Гармонический сигнал | $x(t) = A \cos(\omega t)$ $x(t) = A \cos(\omega t + \varphi)$ | >> t = 0:0.1*pi:4*pi; y = sin(t); >> Tk=2*pi; = 2*pi; Ts = 0.1*2*pi; >> [y,t] = gensig('sin',T,Tk,Ts); |
| Гармонический сигнал с нарастающей частотой | $x(t) = A \sin((\omega_0 + \Delta\omega)t)$ | >>t = 0:0.01:10; >>y = chirp(t,1,10,5); |

| | () | |
|------------------------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------|
| Последовательность биполярных прямоугольных периодических импульсов (меандр) | $x(t) = A \operatorname{sign}(\sin(\omega t))$ $x(t) = A \operatorname{sign}(\sin(\omega t + \varphi))$ | >> [y,t] = gensig('square', 2*pi); |
| Пилообразный сигнал (пила) | $x(t) = \frac{2A}{T_s} (1 - kT_s)$ $(k - \frac{1}{2})T_s < t < (k + \frac{1}{2})T_s$ | >>t = 0:0.1*pi:5*pi; >>y = sawtooth(t); |
| Последовательность периодических треугольных импульсов | $x(t) = A \left(1 - 4 \frac{ t - kT_s }{T_s}\right)$ $(k - \frac{1}{2})T_s < t < (k + \frac{1}{2})T_s$ | - |
| Последовательность однополярных периодических импульсов | $x(t) = \begin{cases} A, & kT - \frac{1}{2}T_s < t < kT + \frac{1}{2}T_s \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$ | >> [y,t] = gensig('pulse',2,10,0.1); |
| Интерполяционная функция А.В. Котельникова | $x(t) = \sin(Nx0.5) / Nx0.5$ $x(t) = \sin c(t) = \sin(\pi x) / \pi x$ | >> x = 0:0.01:1;y = diric(x,50); >>x = 0:0.01:10;y = sinc(x); |
| Случайный равномерный «белый шум» | $0 < x(t) < 1$ | >>y = rand(1,100); plot(1:100,y) |
| Случайный гауссовский «белый шум» | $M[x(t)] = 0, \quad M[(x(t))^2] = 1$ | >>y = randn(1,100); plot(1:100,y) |

1.2.

К данному виду относятся детерминированные и непрерывные сигналы.

1.2.1.

Свойства сигналов как непрерывных функций – монотонность, дифференцируемость, ограниченность по амплитуде и энергии, наличие локальных и глобальных экстремумов, разрывность первого и второго рода.

Для выполнения некоторых преобразований над сигналами, в частности преобразования Фурье, необходимо выполнить специальные условия.

К специальным условиям относят условие Дирихле:

1. Сигнал ограничен по модулю $|x(t)| < \infty$ на конечном интервале времени.
2. Сигнал кусочно-непрерывный (конечное число разрывов) на конечном интервале времени.
3. Сигнал имеет конечное число экстремумов.

В некоторых случаях используют условие Липшица, при котором сигнал считается непрерывным на интервале $[t_1; t_2]$ и удовлетворяет условию $|x(t_1) - x(t_2)| < c|t_1 - t_2|$ для конечного значения c .

1.2.2.

Понятие «спектр» впервые ввел Ньютон в 1664 г. как разложение света на цветные компоненты (частоты).

Спектральные характеристики сигналов связаны с представлением их в форме ряда Фурье:

$$x(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos(k\omega_1 t) + b_k \sin(k\omega_1 t); \quad \omega_1 = \frac{2\pi}{T};$$
$$a_0 = \frac{2}{T} \int_0^T x(t) dt; \quad a_k = \frac{2}{T} \int_0^T x(t) \cos(k\omega_1 t) dt; \quad b_k = \frac{2}{T} \int_0^T x(t) \sin(k\omega_1 t) dt.$$

Такое представление справедливо для периодических сигналов и сигналов с периодическим продолжением на оси времени.

Часто используют комплексную форму ряда Фурье:

$$x(t) = \frac{1}{2} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \bar{A}_k e^{jk\omega_1 t}, \quad \bar{A}_k = \frac{2}{T} \int_0^T x(t) e^{-jk\omega_1 t} dt.$$

1.2.3.

Спектр периодического сигнала может быть представлен различными характеристиками – комплексным спектром, спектральной плотностью мощности, амплитудным спектром, фазовым, огибающей амплитуды и фазы. Перечисленные характеристики представлены в табл. 1.3.

Таблица 1.3

| | |
|--------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| Комплексный спектр (набор амплитуд и фаз для k-частот) | $\bar{A}_k = a_k - jb_k = \frac{2}{T} \int_0^T x(t) \exp(-jk\omega_1 t) dt$ |
| Амплитудный спектр | $ \bar{A}_k = \sqrt{a_k^2 + b_k^2}, k = 1, 2, \dots$ |
| Фазовый спектр | $\varphi_k = \arctg(b_k / a_k), k = 1, 2, 3, \dots$ |
| Огибающая спектра амплитуд | $\bar{A}(\omega) = \frac{2}{T} \int_0^T x(t) \exp(-j\omega t) dt = A(\omega) \exp(-j\varphi(\omega))$ |
| Огибающая спектра фазы | $\varphi(\omega), \omega \in [0; \infty]$ |
| Практическая ширина спектра | Область частот $\omega \in [\omega_0; \omega_1]$, где $A(\omega) > A$ |

Свойства спектра периодического сигнала

1. Спектр периодического сигнала дискретный или линейчатый. Он состоит из отдельных точек с шагом $\omega_1 = 2\pi/T$ по оси частот.

2. Спектральные линии находятся на равном расстоянии $\omega_1 = 2\pi/T$.

3. Коэффициенты ряда Фурье и спектр симметричны относительно частоты $\omega = 0$.

4. Если сигнал – четная функция, то $b_k = 0, k = 1, 2, \dots$, если сигнал – нечетная функция, то $a_k = 0, k = 1, 2, \dots$

5. Равенство Парсеваля
$$P_{cp} = \frac{1}{T} \int_0^T |x(t)|^2 dt = \frac{A_0}{2} + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} A_n^2.$$

6. Неравенство Бесселя $\frac{1}{T} \int_0^T |x(t)|^2 dt < \frac{A_0}{2} + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^M A_n^2, M < \infty.$

1.2.4.

Преобразование Фурье непериодической функции задается выражениями

$$X(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j\omega t} dt, \quad x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(j\omega)e^{j\omega t} d\omega.$$

Спектральные характеристики сигналов представлены в табл. 1.4.

Таблица 1.4

| | |
|--------------------------------|---------------------------------------------------------------------------------------------|
| Комплексный спектр | $X(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \exp(-j\omega t) dt$ |
| Спектральная плотность сигнала | $S(\omega) = X(j\omega) ^2 = X(j\omega)X^*(j\omega)$ |
| Амплитудный спектр | $A(\omega) = X(j\omega) = U(\omega) + jV(\omega) = (X(j\omega)X^*(j\omega))^{1/2}$ |
| Фазовый спектр | $\varphi(\omega) = \arg(X(j\omega)) = \text{arctg}\left(\frac{V(\omega)}{U(\omega)}\right)$ |
| Практическая ширина спектра | Область частот $\omega \in [\omega_0; \omega_1]$, где $A(\omega) > A$ |

1.2.5.

Свойства преобразования Фурье:

1. Линейность:

а) $F\{x_1(t) + x_2(t) + x_3(t) + \dots + x_m(t)\} = X_1(j\omega) + X_2(j\omega) + X_3(j\omega) + \dots + X_m(j\omega),$

б) $F\{\alpha x(t)\} = \alpha F\{x(t)\} = \alpha X(j\omega).$

2. Спектральная характеристика запаздывающей функции (теорема запаздывания) $F\{x(t - t_0)\} = X(j\omega)e^{-j\omega t_0}.$

3. Смещение (перенос спектра) $F^{-1}\{X(j(\omega - \omega_0))\} = x(t)e^{j\omega_0 t}.$

4. Масштабирование. При масштабировании аргумента времени справедливо $F\{x(\alpha t)\} = \frac{1}{\alpha} X\left(\frac{j\omega}{\alpha}\right).$

5. Дифференцирование оригинала $F\{\dot{x}(t)\} = j\omega X(j\omega).$

6. Интегрирование оригинала $x_1(t) = \int_{-\infty}^t x(\tau) d\tau$, $F\{x_1(t)\} = \frac{1}{j\omega} X(j\omega)$.

7. Теорема о свертке $x(t) * h(t) \leftrightarrow X(j\omega)H(j\omega)$.

8. Равенство Парсеваля $\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |X(j\omega)|^2 d\omega$.

9. Инверсия аргумента времени $x(-t) = X(-j\omega) = X^*(j\omega)$.

10. Дуальность спектра $x(t) \leftrightarrow X(j\omega)$, $X(t) \leftrightarrow x(-j\omega)$.

11. Преобразование модулированного сигнала

$$F\{x(t) \cos(\omega_0 t)\} \Leftrightarrow \frac{1}{2} X(-j(\omega - \omega_0)) + \frac{1}{2} X(-j(\omega + \omega_0)).$$

Свойства спектра непериодического сигнала:

1. Амплитудный спектр $A(-\omega) = A(\omega)$ – четная функция, а фазовый $\varphi(-\omega) = -\varphi(\omega)$ – нечетная.

2. Если сигнал $x(t)$ – действительная и четная функции времени, то ее спектральная плотность – функция частоты.

3. Если сигнал $x(t)$ – и функции времени, то ее спектральная плотность – функция частоты.

4. Равенство Парсеваля $E = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |X(j\omega)|^2 d\omega = \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt$.

1.2.6.

Энергетические характеристики сигналов представлены в табл. 1.5.

Таблица 1.5

| | |
|---------------------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------|
| Мгновенная мощность | $P(t) = x^2(t)$ |
| Энергия на периоде | $E = \int_0^T x^2(t) dt$ |
| Средняя мощность сигнала на периоде при ограниченной энергии $E < \infty$ | $P = \frac{1}{T_0} \int_{t_0}^{t_0+T_0} x(t) ^2 dt$ |
| Средняя мощность в спектре при неограниченной энергии $E = \infty$ | $P_0 = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T x^2(t) dt$ |

1.3.

Получение цифрового сигнала можно условно представить как преобразование аналогового сигнала в устройствах дискретизации и квантования по уровню.

1.3.1.

Аналого-цифровое устройство можно упрощенно представить как устройство дискретизации с двумя ключами (рис.1.1).

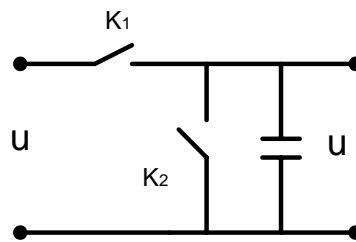


Рис. 1.1

В момент дискретизации ключ K_1 замыкается и конденсатор заряжается до уровня входного напряжения, а в моменты между дискретами (время T_s) ключ K_2 замкнут.

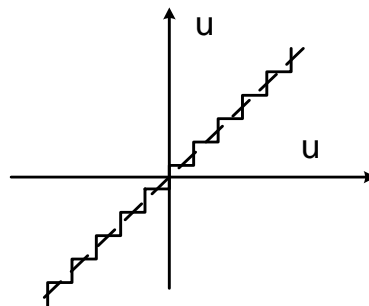


Рис. 1.2

Устройство квантования представлено как статическое звено с нелинейной характеристикой (рис. 1.2). Напряжение на выходе устройства $u(t) = u(t) + \Delta u(t)$, где $\Delta u(t)$ – шум квантования, $n = 2^n - 1$ – число уровней квантования. Единица младшего разряда (ЕМР) $q = \frac{2U_{\max}}{2^n}$. Дисперсия ошибки квантования при равномерном законе распределения ошибки округ-

ления определяется величиной $\sigma^2 = \frac{q^2}{12}$.

1.3.2.

Сигнал, квантованный по уровню и времени, называется .

Модель дискретного сигнала (выходной сигнал дискретизатора) представлена суммой функций Дирака в виде

$$x^*(t) = x(t) \delta_T(t) = x(t) \sum_{k=1}^{\infty} \delta(t - kT_s) = \sum_{k=1}^{\infty} x(kT_s) \delta(t - kT_s).$$

Цифроаналоговый преобразователь можно представить как устройство дискретизации и хранения (экстраполятор нулевого порядка (ЭНП)), которое содержит выходной сигнал неизменным на периоде квантования $x_T(t) = x(0)1(t) - x(0)1(t - T_s)$, где $1(t)$ – единичный импульс. Если вычислить преобразование Лапласа от сигнала на выходе устройства хранения

$$L\{x_T(t)\} = \frac{1 - e^{-T_s s}}{s} x(0),$$

то передаточная функция данного устройства может быть выражена как

$$\frac{L\{x_T(t)\}}{L\{x(0)\delta(t)\}} = \frac{1 - e^{-T_s s}}{s} = W(s).$$

1.3.3.

Комплексный спектр дискретного сигнала определяется выражением

$$X^*(j\omega) = \frac{1}{T_s} \sum_{k=-\infty}^{\infty} X(j(\omega + \frac{2\pi k}{T_s})),$$

из которого следуют такие свойства спектра дискретного сигнала:

1. Частотный спектр дискретного сигнала – это бесконечная сумма сдвинутого спектра непрерывного сигнала на частоту, кратную $2\pi T_s^{-1}$.
2. Спектр дискретного сигнала – периодический с периодом $2\pi T_s^{-1}$.
3. Преобразование Фурье – частотно-временное и дуальное: периодический сигнал – дискретный спектр, дискретный сигнал – периодический спектр.
4. Для уменьшения эффекта наложения спектра необходимо выбрать частоту дискретизации больше удвоенной частоты исходного сигнала и пропустить дискретный сигнал через ФНЧ.

1.3.4.

Данная теорема обосновывает многие методы для синтеза требуемых свойств сигналов и каналов связи.

$$(\quad) \quad \omega_c \quad T_c = 1/2\omega_c.$$

1. Сигнал с ограниченным спектром может быть представлен в ряд по ортонормальным функциям $\text{sinc}(x)$ с коэффициентами ряда как дискретными значениями этого сигнала:

$$x(t) = \sum x(-kT) \frac{\sin(\omega t + k\pi)}{\omega_c t + k\pi}.$$

2. Если известен сигнал с полосой $2\omega_c$, то для периода квантования $T_s = \frac{2\pi}{2\omega_c} = \frac{1}{2f_c}$ число отсчетов на интервале $[0; t_k]$ $N = \frac{t_k}{T_s} = 2f_c t_k$.

3. Для восстановления сигнала по дискретным отсчетам с периодом T_s достаточно пропустить отсчеты через идеальный фильтр нижних частот с частотой среза $\omega_c = \frac{2\pi}{T_s}$.

1.3.5.

Пара преобразований

$$X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) W_N^{-nk}, \quad k = \overline{0, N-1}, \quad x(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(k) W_N^{nk}, \quad n = \overline{0, N-1},$$

где $W_N = e^{-j\frac{2\pi}{N}}$, $W_N^{nk} = e^{-j\frac{2\pi kn}{N}}$, $W_N^N = 1$, $W_N^{kN+i} = W_N^i$, называется дискретным преобразованием Фурье (ДПФ).

Порядок вычисления оценки спектральной плотности непрерывного сигнала с помощью ДПФ:

1. Переход от непрерывного сигнала к дискретному (дискретизация) с выбранным периодом квантования.

2. «Взвешивание» дискретного сигнала (пропускание его через соответствующее «окно» или вырезание конечной последовательности из данных сигнала).

3. Вычисление ДПФ.

Свойства дискретного преобразования Фурье:

1. ДПФ – линейное преобразование.
2. Число коэффициентов ДПФ $X(k)$ равняется числу отсчетов сигнала.
3. Если отсчеты сигнала действительные числа, то коэффициенты ДПФ симметричны относительно отсчета с номером $N/2$.
4. При числе отсчетов, кратном числу 2^k , ДПФ можно вычислять по алгоритму быстрого ДПФ.

При использовании ДПФ для оценки спектральной плотности возможны следующие ошибки:

- перекрытие спектра для дискретного сигнала, так как реальные сигналы не имеют конечного спектра;
- применение конечных «окон», так как получаемый сигнал в частотной области является сверткой преобразования Фурье и временного «окна» (эффект «
»);
- урезание дискретного сигнала за счет конечного окна, что приводит к появлению эффекта «
».

Причины возникновения ошибок, особенности применения ДПФ и пути уменьшения ошибок представлены в табл. 1.6.

Таблица 1.6

| | |
|----------------------------------------------------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| | |
| Увеличение ошибки из-за перекрытия спектра | Увеличение частоты квантования Предварительная фильтрация для уменьшения влияния высокочастотных компонент |
| Увеличение ошибки из-за эффекта «просачивания» | Увеличение ширины «окна» вследствие увеличения числа отсчетов Использование специальных «окон» типа «окон» Бартлетта, Хеннинга, Хемминга и др. |
| Увеличение ошибки из-за эффекта «частотного колла» | Увеличение числа точек при неизменной частоте дискретизации. При ограниченной длительности сигнала дополнить значения нулями |

1.3.6. Z-

Основа анализа непрерывных систем – преобразование Фурье, а дискретных систем – Z-преобразование.

Прямое Z-преобразование.

Применим преобразование Лапласа для дискретного сигнала

$$x^*(t) = \sum_{n=0}^{\infty} x(nT_s) \delta(t - nT_s),$$

получим

$$X(s) = \int_0^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} x(nT_s) \delta(t - nT_s) e^{-st} dt = \sum_{n=0}^{\infty} x(nT_s) \int_0^{\infty} \delta(t - nT_s) e^{-st} dt = \sum_{n=0}^{\infty} x(nT_s) e^{-snT_s}.$$

Если ввести переменную $z = e^{sT_s}$, то Z-преобразование сигнала имеет вид

$$X(z) = \sum_{n=0}^{\infty} x(nT_s) z^{-n} \text{ или } Z\{x(nT_s)\} = X(z).$$

Свойства Z-преобразования представлены в табл. 1.7.

Таблица 1.7

| | |
|-------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| Линейность | $Z\{x_1(nT_s) + x_2(nT_s)\} = X_1(z) + X_2(z)$ |
| Умножение на экспоненту | $a^n x(nT_s) \xrightarrow{Z} X(a^{-1}z)$ |
| Теорема о смещении во времени | $x(nT_s - mT_s) \xrightarrow{Z} z^{-m} X(z)$ |
| Свойство коэффициентов разложения в ряд по степеням z | $x(nT_s) \xrightarrow{Z} X(z) = q_0 + q_1 z^{-1} + q_2 z^{-2} + \dots$ $q_n = x(nT_s)$ |
| Теорема о начальном и конечном значениях | $x(0) = \lim_{z \rightarrow \infty} X(z), \quad x(\infty) = \lim_{z \rightarrow 1} (1 - z^{-1}) X(z)$ |

Процедура нахождения Z-преобразования непрерывной функции состоит из следующих этапов:

1. Определение дискретной функции через непрерывную, прошедшую через идеальный квантователь $x^*(t)$.
2. Определение преобразования Лапласа от функции $x^*(t)$.

3. Замена выражения e^{sT_s} на переменную z , представление в виде ряда и

запись через сумму
$$X(z) = \frac{b_m z^m + b_{m-1} z^{m-1} + \dots + b_0}{a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_0}.$$

Обратное Z-преобразование.

Обратное преобразование ставит в соответствие изображению оригинал и записывается через обратное преобразование Лапласа:

$$x(kT_s) = \frac{1}{2\pi j} \int_{\sigma-j\infty}^{\sigma+j\infty} X^*(s) e^{skT_s} ds.$$

Методы вычисления обратного Z-преобразования.

1. (). Если Z-преобразование сигнала имеет дробно-рациональный вид, то делением полинома на полином можно получить ряд по переменной z^{-1} , коэффициентами которого являются отсчеты сигнала:

$$X(z) = \frac{a(z)}{b(z)} = q_0 + q_1 z^{-1} + q_2 z^{-2} + \dots, \quad q_0 = x(0), \quad q_1 = x(T_s), \quad q_2 = x(2T_s), \dots$$

2. на простые множители и использование табличных результатов. Если преобразование сигнала имеет разложение

$$X(z) = \frac{A}{1 - \alpha z^{-1}} + \frac{B \alpha z^{-1} \sin(T_s)}{1 - 2\alpha z^{-1} \cos(T_s) + \alpha^2 z^{-2}} + \frac{C \alpha z^{-1}}{(1 - \alpha z^{-1})^2} \dots,$$

то преобразование в соответствии с таблицей запишем так:

$$x(t) = 1(kT_s) + \cos(kT_s) + k\alpha^k.$$

3. . Выражение сигнала через изображение также имеет вид контурного интеграла $x(n\Delta t) = \frac{1}{2\pi j} \oint_C X(z) z^{n-1} dz$, который можно

заменить суммой вычетов $\frac{1}{2\pi j} \oint_C X(z) z^{n-1} dz = \sum \text{Res } X(z) z^{n-1}$ по всем

полюсам функции $X(z)$, где вычет в полюсе $z = a$ имеет выражение

$$\operatorname{Res}_a X(z) = \frac{1}{(k-1)!} \lim_{z \rightarrow a} \frac{d^{k-1}}{dz^{k-1}} [(z-a)^k X(z)].$$

Z-преобразования специальных функций представлены в табл. 1.8.

Таблица 1.8

| $x(t)$ | Z - $X(z)$ |
|-----------------------|--------------------------------------------------------------------------------|
| $1(kT_s)$ | $\frac{1}{1-z^{-1}}$ |
| kT_s | $\frac{z^{-1}}{(1-z^{-1})^2}$ |
| α^k | $\frac{1}{1-\alpha z^{-1}}$ |
| $k\alpha^k$ | $\frac{\alpha z^{-1}}{(1-\alpha z^{-1})^2}$ |
| $\sin(kT_s)$ | $\frac{z^{-1} \sin(T_s)}{1-2z^{-1} \cos(T_s) + z^{-2}}$ |
| $\alpha^k \cos(kT_s)$ | $\frac{\alpha z^{-1} \sin(T_s)}{1-2\alpha z^{-1} \cos(T_s) + \alpha^2 z^{-2}}$ |

1.4.

1.4.1.

называют такую функцию, значение которой для некоторого момента времени есть случайная величина с вероятностными характеристиками.

– это набор или ансамбль реализаций случайных функций с общими вероятностными характеристиками.

можно рассматривать как -
, которая характеризуется совместной функцией плотности вероятности $p(x(t_1), x(t_2), \dots, x(t_n))$.

Если выполнено условие $p(x(t_1+t), x(t_2+t), \dots, x(t_n+t)) = p(x(t_1), x(t_2), \dots, x(t_n))$ для произвольного времени t , то такой процесс называется ,
в противном случае – .

Для процесса математическое ожидание и дисперсия не зависят от времени.

Случайный процесс, для которого среднее по времени совпадает со средним по реализации, называется .

Характеристики дискретной случайной величины представлены в табл. 1.9.

Таблица 1.9

| | | |
|---------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------|
| | | |
| Распределение вероятности | $F_X(x) = \{ P_{x_1}, P_{x_2}, P_{x_3}, \dots, P_{x_N} \}$ $P_{x_N} = P(X = x_N)$ | $F(x_i) \geq F(x_{i-1})$ $0 \leq F(x_i) \leq 1$ |
| Математическое ожидание | $\bar{x} = M[x] = \sum_{i=1}^N x_i P_{x_i}$ | $\bar{x} = M[ax] = aM[x]$ $a - \text{константа}$ |
| Дисперсия | $\sigma^2 = M[(x - \bar{x})^2] = \sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})^2 P_{x_i}$ | $\sigma^2 \geq 0, \sigma = \sqrt{\sigma^2} -$ СКО |
| Момент k-го порядка | $M[(x)^k] = \sum_{i=1}^N (x_i)^k P_{x_i}$ | - |
| Центральный момент k-го порядка | $M[(x - \bar{x})^k] = \sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})^k P_{x_i}$ | - |

Характеристики непрерывной случайной величины приведены в табл. 1.10.

Таблица 1.10

| | | |
|--------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| | | |
| Функция вероятности случайной величины | $F_X(x) = \{P(X < x), -\infty < X < \infty\}$ | $F(\infty) = 1, F(-\infty) = 0$ $0 \leq F(\infty) \leq 1$ |
| Функция плотности вероятности случайной величины (функция распределения) | $p_X(x) = dF(x)/dx$ | $p_X(x) \geq 0, \int_{-\infty}^{\infty} p_X(x) dx = 1$ $F_X(x_1 < x < x_2) = \int_{x_1}^{x_2} p_X(x) dx$ |
| | | $F_X(X = x) = p_X(x) dx$ $y = f(x), p_Y(y) = p_X(f^{-1}(y))$ |
| Математическое ожидание | $M[x] = \int_{-\infty}^{\infty} xp_X(x) dx$ | $M[x_1 + x_2] = M[x_1] + M[x_2]$ |

Окончание табл. 1.10

| | | |
|---------------------------------|--------------------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| Дисперсия σ^2 | $M[(x - \bar{x})^2] = \int_{-\infty}^{\infty} (x - \bar{x})^2 p_X(x) dx$ | $\sigma^2 \geq 0, \sigma = \sqrt{\sigma^2}$ – СКО |
| Момент k-го порядка | $M[(x)^k] = \int_{-\infty}^{\infty} (x)^k p_X(x) dx$ | - |
| Центральный момент k-го порядка | $M[(x - \bar{x})^k] = \int_{-\infty}^{\infty} (x - \bar{x})^k p_X(x) dx$ | Если X – центрированная величина нормального закона распределения, то $M[(x)^k] = 0$ при $k \geq 3, 5, 7, \dots$ |

Используемые функции распределения представлены в табл. 1.11.

Таблица 1.11

| | | |
|-------------------------|----------------------------------------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| - | | |
| Равномерный | $p_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a}, & x \in [a, b] \\ 0, & x \notin [a, b] \end{cases}$ | $M[x] = \frac{b-a}{2},$ $\sigma^2 = \frac{(b-a)^2}{12}$ |
| Гауссовский | $p_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp -\frac{(x-\bar{x})^2}{2\sigma^2}$ | $M[x] = \bar{x}, \sigma^2 = \sigma^2$ $M(x-\bar{x})^k = \begin{cases} 1 \cdot 3 \dots (k-1) \sigma^k, & k=2, 4 \\ 0, & k=1, 3, 5 \end{cases}$ |
| Релеевский | $y = \sqrt{\sum_{i=1}^N x_i^2}, p_Y(y) = \frac{y}{\sigma^2} e^{-\frac{y^2}{2\sigma^2}}$ | $M[y] = \sqrt{2\sigma^2} \left(1 + \frac{1}{2} k\right)$ $\sigma_y^2 = 2 - \frac{1}{2} \pi \sigma^2$ |
| Многомерный Гауссовский | $p_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi \det(Q_x)}} e^{-\frac{1}{2}(x-\bar{x})^T Q_x^{-1}(x-\bar{x})}$ | $M[(x-\bar{x})(x-\bar{x})^T] = Q_x$ $M[x] = \bar{x}$ |

Характеристики двух непрерывных случайных величин представлены в табл. 1.12.

Таблица 1.12

| | | |
|-----------------------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| Функция вероятности случайных величин | $P(X < x, Y < y)$ $F_{XY}(x, y) = \begin{matrix} -\infty < X < \infty \\ -\infty < Y < \infty \end{matrix}$ | $F(\infty, \infty) = 1, F(-\infty, -\infty) = 0$ $0 \leq F(\infty, \infty) \leq 1$ |
| Совместная функция плотности вероятности двух случайных величин (функция распределения) | $p_{XY}(x, y) = d^2 F(x, y) / dx dy$ | $p_{XY}(x, y) \geq 0$ $\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} p_{XY}(x, y) dx dy = 1$ $\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} p_{XY}(x, y) dx dy = 1$ $p_{XY}(x, y) = p_X(x)p_Y(y)$ – для независимых величин |
| Условная функция плотности вероятности двух случайных величин (функция распределения) | $p(x/y) = p(x, y) / p_Y(y)$ $p(y/x) = p(x, y) / p_X(x)$ $p(x, y) = p(x/y)p_Y(y) = p(y/x)p_X(x)$ | $\int_{-\infty}^{\infty} p_{XY}(x, y) dx = p_Y(y)$ $\int_{-\infty}^{\infty} p_{XY}(x, y) dy = p_X(x)$ |
| Условное математическое ожидание | $M[x] = \int_{-\infty}^{\infty} xp(x/y) dx$ | $M[x_1 + x_2] = M[x_1] + M[x_2]$ |
| Смешанный момент | $M[(x)^k (y)^m] =$ $= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (x)^k (y)^m p_{XY}(x, y) dx dy$ | - |
| Смешанный центральный момент | $M[(x - \bar{x})^k (y - \bar{y})^m] =$ $= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (x - \bar{x})^k (y - \bar{y})^m p_{XY}(x, y) dx dy$ | - |
| Ковариация двух величин | $M[xy] = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} xyp_{XY}(x, y) dx dy$ | $M[xy] = 0$ – для независимых величин |
| Корреляция двух величин | $M[(x - \bar{x})(y - \bar{y})] =$ $= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (x - \bar{x})(y - \bar{y})p_{XY}(x, y) dx dy$ | $M[(x - \bar{x})(y - \bar{y})] =$ $= M[(x - \bar{x})]M[(y - \bar{y})]$ для независимых величин |
| Коэффициент корреляции двух величин | $r_{XY} = \frac{M[(x - \bar{x})(y - \bar{y})]}{\sqrt{M[(x - \bar{x})^2]M[(y - \bar{y})^2]}}$ | $-1 \leq r_{XY} \leq 1$ $r_{XY} = 0$ – для независимых величин |

1.4.2.

Характеристики случайного процесса даны в табл. 1.13.

Таблица 1.13

| | | |
|--------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| Математическое ожидание | $M[x(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} xp_X(x, t) dx$ | $M[x(t_1) + x(t_2)] = M[x(t_1)] + M[x(t_2)]$ |
| Центральный момент k-го порядка | $M(x(t))^k = \int_{-\infty}^{\infty} (x(t))^k p(x, t) dx$ | |
| Автоковариационная функция | $M[x(t_1)x(t_2)] = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x_1 x_2 p(x_1, t_1; x_2, t_2) dx_1 dx_2$ | |
| Автокорреляционная функция | $M(x(t_1) - \bar{x}(t_1))(x(t_2) - \bar{x}(t_2)) = K_{xx}(t_1, t_2)$ | $K_{xx}(t_1, t_2) = K_{xx}(t_1 - t_2)$ <p>– для стационарного случайного процесса</p> $K_{xx}(0) = M[(x(t))^2] = \sigma_t^2$ – дисперсия $K_{xx}(\tau) = K_{xx}(-\tau)$ – четная функция Для эргодического процесса $K_{xx}(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T x(t)x(t+\tau) dt$ |
| Взаимная корреляционная функция | $M(x(t_1) - \bar{x}(t_1))(y(t_2) - \bar{y}(t_2)) =$ $= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (x_1 - \bar{x}_1)(y_2 - \bar{y}_2) p_{XY}(x_1, t_1; y_2, t_2) dx_1 dy_2 =$ $= K_{XY}(t_1, t_2)$ | Для эргодического процесса $K_{XY}(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T x(t)y(t+\tau) dt$ |
| Нормированная корреляционная функция | $r_{XY}(t_1, t_2) = \frac{K_{XY}(t_1, t_2)}{\sqrt{K_{XX}(t_1, t_1)K_{YY}(t_2, t_2)}}$ $r_{XX}(t_1, t_2) = \frac{K_{XX}(t_1, t_2)}{\sqrt{K_{XX}(t_1, t_1)K_{XX}(t_2, t_2)}}$ | $-1 \leq r_{XY}(t_1, t_2) \leq 1$ $r_{XY}(t_1, t_2) = r_{YX}(t_2, t_1)$ |
| Среднее по времени | $\bar{x}_t = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T x(t) dt$ | Для эргодического процесса $\bar{x}_t = M[x(t)]$ |
| Среднее квадратов по времени | $\overline{x_t^2} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T x^2(t) dt$ | Для эргодического процесса $\overline{x_t^2} = M[x^2(t)]$ |

| | | |
|-------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| - | | |
| Спектральная плотность мощности стационарного сигнала | $S_x(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} K_{xx}(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau =$ $= 2 \int_0^{\infty} K_{xx}(\tau) \cos(\omega\tau) d\tau$ | $K_{xx}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} S_x(j\omega) e^{j\omega\tau} d\omega =$ $= 2 \int_0^{\infty} S_x(\omega) \cos(\omega\tau) d\omega$ $\sigma^2 = K_{xx}(0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_{K_{xx}}(j\omega) d\omega$ $S_{K_{xx}}(\omega) \text{ – действительная функция частоты}$ |
| Характеристики процесса типа «белый шум» | $K_{xx}(\tau) = \frac{N_x}{2} \delta(\tau)$ | $S_{K_{xx}}(\omega) = N_x$ |

Оценки характеристик эргодического случайного процесса по выборочным данным представлены в табл.1.14.

Таблица 1.14

| | | |
|-----------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------|
| | | |
| Среднее (математическое ожидание) | $\bar{x}_t = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T x(t) dt$ | $\bar{x} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i$ |
| Дисперсия | $\overline{x_t^2} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T (x(t) - \bar{x}_t)^2 dt$ | $\sigma_x^2 = \frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})^2$ |
| Автокорреляционная функция | $\overline{x(t)x(t+\tau)} =$ $= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T x(t)x(t+\tau) dt$ | $K_{xx}[n] = \frac{1}{N-n} \sum_{i=1}^{N-n-1} (x_i - \bar{x})(x_{i+n} - \bar{x})$ |
| Взаимная корреляционная функция | $\overline{x(t)y(t+\tau)} =$ $= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T x(t)y(t+\tau) dt$ | $K_{xy}[n] = \frac{1}{N-n} \sum_{i=1}^{N-n-1} (x_i - \bar{x})(y_{i+n} - \bar{y})$ |

1.4.3.

Перечень функций вычисления характеристик в МАТЛАБе представлен в табл. 1.15.

Таблица 1.15

| | | |
|-----------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| Среднее (математическое ожидание) | $\bar{x} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i$ | <pre>>> x=[1 3 5 7 9]; >> mean(x) >> x=[1 3 5 7 9;0 0 1 1 1]; >>mean(x)</pre> |
| Дисперсия | $\sigma_x^2 = \frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})^2$ | <pre>>> x=[1 3 5 8 9];std(x)^2 >> x=[1 3 5 8 9;0 0 1 1 1]; >> std(x)^2</pre> |
| Автокорреляционная функция | $K_{xx}[n] = \frac{1}{N-n} \sum_{i=1}^{N-n-1} (x_i - \bar{x})(x_{i+n} - \bar{x})$ | <pre>>> x=[1 3 5 8 9]; >> xcov(x)</pre> |
| Взаимная корреляционная функция | $K_{xy}[n] = \frac{1}{N-n} \sum_{i=1}^{N-n-1} (x_i - \bar{x})(y_{i+n} - \bar{y})$ | <pre>>> x=[1 3 5 8 9]; >> y=[0 0 0 0 1]; >> xcov(x,y)</pre> |
| Коэффициент корреляции | $r_{xy} = \frac{K_{xy}(0)}{\sigma_x \sigma_y}$ | <pre>>> corrcoef(x,y)</pre> |

1.4.3.

Перечень функций вычисления характеристик в МАТЛАБе представлен в табл. 1.15.

Таблица 1.15

| | | |
|-----------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| Среднее (математическое ожидание) | $\bar{x} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i$ | <pre>>> x=[1 3 5 7 9]; >> mean(x) >> x=[1 3 5 7 9;0 0 1 1 1]; >>mean(x)</pre> |
| Дисперсия | $\sigma_x^2 = \frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})^2$ | <pre>>> x=[1 3 5 8 9];std(x)^2 >> x=[1 3 5 8 9;0 0 1 1 1]; >> std(x)^2</pre> |
| Автокорреляционная функция | $K_{xx}[n] = \frac{1}{N-n} \sum_{i=1}^{N-n-1} (x_i - \bar{x})(x_{i+n} - \bar{x})$ | <pre>>> x=[1 3 5 8 9]; >> xcov(x)</pre> |
| Взаимная корреляционная функция | $K_{xy}[n] = \frac{1}{N-n} \sum_{i=1}^{N-n-1} (x_i - \bar{x})(y_{i+n} - \bar{y})$ | <pre>>> x=[1 3 5 8 9]; >> y=[0 0 0 0 1]; >> xcov(x,y)</pre> |
| Коэффициент корреляции | $r_{xy} = \frac{K_{xy}(0)}{\sigma_x \sigma_y}$ | <pre>>> corrcoef(x,y)</pre> |

2.

При передаче сообщений в форме сигналов по каналу связи происходит их искажение и добавляются помехи. Если известны свойства каналов передачи и помехи в виде математических моделей, то эти искажения можно учесть при построении систем связи.

2.1.

Виды математических моделей каналов связи – (–), (), (), ().

Формы математических моделей – (–), (), (), ().

Если входной сигнал канала $u(t)$, а выходной $y(t)$, то их взаимосвязь определяется с начальными условиями

$$\sum_{k=0}^n a_k y^{(k)}(t) = \sum_{l=0}^n b_l u^{(l)}(t), \quad y(t_0) = y_0, \dots, y^{n-1}(t_0) = y_0^{n-1}, u(t_0) = u_0, \dots, u^{m-1}(t_0) = u_0^{m-1}.$$

Аналог дифференциального уравнения – интегральное уравнение, которое называется :

$$y(t) = \int_0^{\infty} h(\tau) u(t - \tau) d\tau.$$

Определим преобразование Лапласа от дифференциального уравнения при нулевых начальных условиях $\sum_{k=0}^n a_k s^k Y(s) = \sum_{l=0}^n b_l s^l U(s)$ и возьмем отно-

шение преобразованных по Лапласу выходного сигнала к входному

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{\sum_{l=0}^n b_l s^l}{\sum_{k=0}^n a_k s^k}.$$

() динамической системы называется отношение преобразованных по Лапласу выходного сигнала к входному при ну-

левых начальных условиях $W(s) = \frac{\sum_{l=0}^n b_l s^l}{\sum_{k=0}^n a_k s^k}.$

Определим преобразование Фурье от входного и выходного сигналов $F\{u(t)\} = U(j\omega)$, $F\{y(t)\} = Y(j\omega)$ и представим их в комплексном виде $U(j\omega) = A_u(\omega)e^{j\varphi_u}$, $Y(j\omega) = A_y(\omega)e^{j\varphi_y}$.

() называется отношение комплексных амплитуд выходного и входного сигналов:

$$K(j\omega) = \frac{A_y(\omega)}{A_u(\omega)} e^{j(\varphi_y - \varphi_u)},$$

а определение через ПФ имеет вид $K(j\omega) = W(s)|_{s=j\omega}$.

Для дискретных элементов систем связи в их описании применяют -

$$y[nT_s] = -\sum_{k=1}^n a_k y[(n-k)T_s] + \sum_{l=0}^n b_l y[(m-l)T_s],$$

которые имеют взаимосвязь с дифференциальными уравнениями.

Определим Z-преобразование от разностного уравнения при нулевых начальных условиях $Y(z) = -\sum_{k=1}^n a_k z^{-k} Y(z) + \sum_{l=1}^m b_l z^{-k} U(z)$ и возьмем отношение

выходного и входного сигналов $\frac{Y(z)}{U(z)} = \frac{\sum_{l=1}^m b_l z^{-k}}{1 + \sum_{k=1}^n a_k z^{-k}}.$

() динамической системы называется отношение z-преобразованных выходного к входному сигналов при

нулевых начальных условиях
$$W(z) = \frac{\sum_{l=1}^m b_l z^{-kT_s}}{\sum_{k=0}^n a_k z^{-kT_s}} .$$

2.2.

Существуют три основных способа получения математических моделей - аналитический, идентификационный и комбинированный.

Аналитический – использует известные законы с их формализацией в математическом виде, необходимые параметры рассчитывают из исходных данных.

Идентификационный – основан на постулировании структуры модели и уточнения параметров по данным эксперимента.

Комбинированный – сочетает аналитический и идентификационный способы и применяется чаще, так как использует в построении модели априорные и апостериорные данные.

Идентификационный – использует множество методов идентификации: активной с подачей специальных входных сигналов типа меандра, ступеньки, коротких импульсов, гармонического и др.; параметрической идентификации при нормальных условиях эксплуатации; структурной идентификации; непараметрической частотной и др.

2.3.

Если выход канала связи представить в виде суммы полезного сигнала $u(t)$ и помехи $v(t)$, то такой канал называется и описывается моделью $y(t) = u(t) + v(t)$.

Возможные искажения в канале связи могут вызвать случайные изменения параметров канала, привести к нулевой амплитуде сигнала или «замира-

нию» и вызывать другие эффекты. Для таких каналов связи используют более сложные модели – зеркального канала и дисперсионного.

() . Результирующий сигнал на выходе получается в виде суммы конечного числа запаздывающих входных сигналов с разной амплитудой и фазой. В этом случае импульсная функция канала имеет вид $h(t) = \sum_{i=1} a_i \psi_i(t, \varphi_i)$, где $\psi_i(t, \varphi_i)$ – импульсная функция, соответствующая одному лучу. В частности, импульсная функция может быть получена как выход идеального полосового фильтра $\psi_i(t, \varphi_i) = \text{sinc}(0,5 * \Delta\omega t - \varphi_i)$.

. Выход канала представлен в виде суммы бесконечного числа физических лучей с бесконечно малыми и приблизительно равными дисперсиями.

. Динамические искажения в канале связи учитывают с помощью динамических моделей в формах передаточной и весовой функций, частотных характеристик и др.

2.4.

.

При подаче на вход системы сигнала на выходе формируется выходной сигнал, свойства которого определяются свойствами входного сигнала и самой системы. Выходной сигнал формируется в соответствии с уравнением, описывающим данную систему, решение которого определяет выходной сигнал. Установление свойств выходного сигнала и системы по входному сигналу называется задачей анализа системы. Наиболее распространены методы анализа линейных систем – операционный или метод операционного исчисления (преобразование Лапласа или Фурье), метод интеграла свертки, частотный и моделирования.

1. основан на вычислении обратного преобразования Лапласа от произведения передаточной функции системы и изображения входного сигнала $y(t) = L^{-1}\{W(s)U(s)\}$.

2. базируется на вычислении интеграла Дюамеля от произведения импульсной или весовой функции на входной сигнал $y(t) = \int_0^{\infty} h(\tau)u(t - \tau) d\tau$. Из данного метода вытекает, что передаточная функция – это преобразование Лапласа от импульсной или весовой функции.

3. основан на использовании комплексного коэффициента передачи системы и преобразования Фурье от входного сигнала $Y(j\omega) = W(j\omega)U(j\omega)$. Выходной сигнал определяется с помощью вычисления обратного преобразования Фурье $y(t) = F^{-1}\{W(j\omega)U(j\omega)\}$.

4. или численного решения дифференциального уравнения. Позволяет решать задачи анализа с нелинейными и нестационарными элементами, что значительно его отличает от первых трех методов, и считается универсальным.

Временные характеристики динамической системы – и –
или функция.

динамической системы – функция времени выхода или выходной сигнал системы, полученный при входном воздействии типа единичной ступеньки. Это есть реакция динамической системы при ступенчатом входном сигнале $y(t) = \int_0^{\infty} h(\tau)1(t - \tau) d\tau$.

динамической системы – функция времени выхода или выходной сигнал системы, полученный при входном воздействии типа дельта-функции Дирака $y(t) = \int_0^{\infty} h(\tau)\delta(t - \tau) d\tau = h(t)$.

Преобразование входного сигнала – это процесс формирования выходного сигнала по заданному входному. Выход системы формируется в соот-

ветствии с уравнением динамики системы, решение которого позволяет найти выходной сигнал. Для простейшего уравнения первого порядка

$$T\dot{y}(t) + y(t) = u(t) \text{ решение запишем так: } y(t) = e^{-\frac{t}{T}} y_0 + \int_0^t e^{-\frac{(t-\tau)}{T}} u(\tau) d\tau. \text{ Оно}$$

состоит из двух слагаемых: первое – свободное решение, определяемое только начальным условием и свойством системы (параметром T); второе – вынужденное решение, определяемое свойством системы и входным сигналом. С помощью этих методов (операционного, интеграла свертки и частотного) получают выходной сигнал, соответствующий вынужденному решению или решению при нулевых начальных условиях, а метод моделирования позволяет найти полное решение.

2.5.

Преобразование сигналов линейными непрерывными системами в частотной области соответствует построению реакции системы на гармонический сигнал с произвольной частотой. Если известна данная реакция, то можно оценить реакцию на произвольный входной сигнал. Используя эту идею, представим входной сигнал в виде гармонической функции $u(t) = A_u \cos(\omega t + \varphi_u) = \operatorname{Re} [A_u e^{j\omega} e^{j\varphi_u}]$. Выходной сигнал в установившемся режиме также будет гармонической функцией той же частоты, но отличной амплитуды и фазы $y(t) = A_y \cos(\omega t + \varphi_y) = \operatorname{Re} [A_y e^{j\omega} e^{j\varphi_y}]$.

Комплексным коэффициентом передачи системы $K(\omega)$ называется отношение комплексных амплитуд выходного и входного сигналов

$$K(\omega) = \frac{A_y}{A_u} e^{j\varphi_y - j\varphi_u}. \text{ Комплексный коэффициент передачи можно определить}$$

как отношение преобразованных по Фурье выходного и входного сигналов

$$K(\omega) = \frac{F\{y(t)\}}{F\{u(t)\}} = W(s)|_{s=j\omega}.$$

Связь преобразования Фурье входного и выходного сигналов находят через комплексный коэффициент передачи $Y(j\omega) = W(j\omega)U(j\omega)$. Соответственно частотные характеристики выходного сигнала зависят от частотных (спектральных) характеристик входного сигнала и системы через комплексный коэффициент передачи.

Если комплексный коэффициент передачи представить как комплексное число $K(\omega) = A(\omega)e^{j\varphi(\omega)}$, где $A(\omega) = |K(\omega)|$, $\varphi(\omega) = \arg K(\omega)$, и рассмотреть данное число как вектор на комплексной плоскости, то при изменении частоты от нуля до бесконечности конец вектора-годографа описывает траекторию –

Из комплексного числа можно выделить четыре функции частоты – $A(\omega)$, $\varphi(\omega)$, $K_{\text{Re}}(\omega)$, $K_{\text{Im}}(\omega)$, где $A(\omega)$ – амплитудно-частотная характеристика (АЧХ); $\varphi(\omega)$ – фазочастотная характеристика (ФЧХ); $K_{\text{Re}}(\omega) = \text{Re}[K(\omega)]$ – действительная частотная характеристика; $K_{\text{Im}}(\omega) = \text{Im}[K(\omega)]$ – мнимая частотная характеристика.

АЧХ системы – функция частоты, а ФЧХ –

При использовании логарифмического масштаба часто применяют логарифмические характеристики как зависимость логарифма амплитуды от логарифма частоты.

зависимость $L(\omega) = 20 \lg A(\omega)$ от $\lg \omega$. Множитель 20 позволяет выразить амплитуду в единицах децибел. Логарифм, десятичный от величины, называется по имени французского ученого Бела.

() – это зависимость фазы системы от десятичного логарифма частоты.

2.6.

Виды элементарных звеньев – безынерционное (статическое); инерционное первого порядка (апериодическое); инерционное второго порядка (колебательное); идеальное дифференцирующее; дифференцирующее; интегрирующее; запаздывающее; идеальный фильтр низких частот.

Характеристики статического звена представлены в табл. 2.1.

Таблица 2.1

| | |
|-----------------------------------------------------|----------------------------------------------|
| Дифференциальное уравнение | $y(t) = ku(t)$ |
| Передаточная функция | $W(s) = k$ |
| Переходная функция | $h(t) = k 1(t)$ |
| Импульсная функция | $w(t) = k \delta(t)$ |
| Амплитудно-частотная характеристика | $ W(j\omega) = k$ |
| Фазочастотная характеристика | $\varphi(\omega) = 0$ |
| Амплитудно-фазочастотная характеристика (АФЧХ) | Точка на плоскости |
| Логарифмическая амплитудно-частотная характеристика | Постоянное значение амплитуды и нулевая фаза |

Характеристики апериодического звена приведены в табл. 2.2.

Таблица 2.2

| | |
|----------------------------|-------------------------------------|
| Дифференциальное уравнение | $T \frac{dy(t)}{dt} + y(t) = ku(t)$ |
| Передаточная функция | $W(s) = \frac{k}{Ts+1}$ |
| Переходная функция | $h(t) = k(1 - \exp(-T^{-1}t))$ |
| Импульсная функция | $w(t) = T^{-1} e^{-T^{-1}t}$ |

Окончание табл. 2.2

| | |
|-----------------------------------------------------|---------------------------------------------------|
| | |
| Амплитудно-частотная характеристика | $ W(j\omega) = \frac{k}{\sqrt{(T\omega)^2 + 1}}$ |
| Фазочастотная характеристика | $\varphi(\omega) = -\arctan(T\omega)$ |
| Амплитудно-фазочастотная характеристика | <code>>>nyquist(tf([1],[1 1]),grid)</code> |
| Логарифмическая амплитудно-частотная характеристика | <code>>>bode(tf([1],[1 1]),grid)</code> |

Характеристики интегрирующего звена приведены в табл. 2.3.

Таблица 2.3

| | |
|-----------------------------------------------------|--------------------------------------------------|
| | |
| Дифференциальное уравнение | $\frac{dy(t)}{dt} = ku(t)$ |
| Передаточная функция | $W(s) = \frac{k}{s}$ |
| Переходная функция | $h(t) = k t$ |
| Импульсная функция | $w(t) = k \cdot 1(t)$ |
| Амплитудно-частотная характеристика | $ W(j\omega) = \frac{k}{\omega}$ |
| Фазочастотная характеристика | $\varphi(\omega) = -\frac{\pi}{2}$ |
| Амплитудно-фазочастотная характеристика | <code>>>nyquist(tf([1],[1 0]),grid)</code> |
| Логарифмическая амплитудно-частотная характеристика | <code>>>bode(tf([1],[1 0]),grid)</code> |

Характеристики этого звена приведены в табл. 2.4.

Таблица 2.4

| | |
|-----------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------|
| Дифференциальное уравнение | $y(t) = k \frac{du(t)}{dt}$ |
| Передаточная функция | $W(s) = k s$ |
| Переходная функция | $h(t) = k \delta(t)$ |
| Импульсная функция | - |
| Амплитудно-частотная характеристика | $ W(j\omega) = k\omega$ |
| Фазочастотная характеристика | $\varphi(\omega) = \frac{\pi}{2}$ |
| Амплитудно-фазочастотная характеристика | Команды МАТЛАБа для построения АФЧХ: >>nyquist(tf([1 0],[0 1]),grid |
| Логарифмическая амплитудно-частотная характеристика | Команды МАТЛАБа для построения ЛАЧХ: >>bode(tf([1 0],[0 1]),grid |

Характеристики этого звена приведены в табл. 2.5.

Таблица 2.5

| | |
|-----------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------|
| Дифференциальное уравнение | $y(t) = k T \frac{du(t)}{dt} + 1$ |
| Передаточная функция | $W(s) = k(Ts + 1)$ |
| Переходная функция | $h(t) = k \delta(t)$ |
| Импульсная функция | - |
| Амплитудно-частотная характеристика | $ W(j\omega) = k\sqrt{1 + (T\omega)^2}$ |
| Фазочастотная характеристика | $\varphi(\omega) = \arctan(T\omega)$ |
| Амплитудно-фазочастотная характеристика | Команды МАТЛАБа для построения АФЧХ: >>nyquist(tf([1 1],[0 1]),grid |
| Логарифмическая амплитудно-частотная характеристика | Команды МАТЛАБа для построения ЛАЧХ: >>bode(tf([1 1],[0 1]),grid |

Характеристики этого звена приведены в табл. 2.6.

Таблица 2.6

| | |
|-----------------------------------------------------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| | |
| Дифференциальное уравнение | $\frac{d^2 y(t)}{dt^2} + a_1 \frac{dy(t)}{dt} + a_0 y(t) = b_0 u(t)$ |
| Передаточная функция | $W(s) = \frac{k \omega_0^2}{s^2 + 2\xi \omega_0 s + \omega_0^2}$ |
| Переходная функция | $h(t) = 1(t) - \frac{1}{\sqrt{1-\xi^2}} e^{-\xi \omega_0 t} \sin(\omega_0 \sqrt{1-\xi^2} t + \varphi)$ |
| Импульсная функция | $w(t) = -\frac{\omega_0}{\sqrt{1-\xi^2}} e^{-\xi \omega_0 t} \sin(\omega_0 \sqrt{1-\xi^2} t)$ |
| Амплитудно-частотная характеристика | $ W(j\omega) = \frac{k}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (2\xi \omega \omega_0)^2}}$ |
| Фазочастотная характеристика | $\varphi(\omega) = -\arctan \frac{2\xi \omega \omega_0}{\omega_0^2 - \omega^2}$ |
| Амплитудно-фазочастотная характеристика | Команды МАТЛАБа для построения АФЧХ: $\gg \omega_0 = 2 * \pi * 10; \text{ksi} = 0.01;$ $\gg \text{nyquist}(\text{tf}([\omega_0^2], [1 \ 2 * \text{ksi} * \omega_0 \ \omega_0^2])), \text{grid}$ |
| Логарифмическая амплитудно-частотная характеристика | Команды МАТЛАБа для построения ЛАЧХ: $\gg \omega_0 = 2 * \pi * 10; \text{ksi} = 0.01;$ $\gg \text{bode}(\text{tf}([\omega_0^2], [1 \ 2 * \text{ksi} * \omega_0 \ \omega_0^2])), \text{grid}$ |

Характеристики этого звена приведены в табл. 2.7.

Таблица 2.7

| | |
|-------------------------------------|---------------------------------|
| | |
| Дифференциальное уравнение | $y(t) = u(t - \tau)$ |
| Передаточная функция | $W(s) = e^{-s\tau}$ |
| Переходная функция | $h(t) = 1(t - \tau)$ |
| Импульсная функция | $w(t) = \delta(t - \tau)$ |
| Амплитудно-частотная характеристика | $ W(j\omega) = 1$ |
| Фазочастотная характеристика | $\varphi(\omega) = -\tau\omega$ |

Характеристики этого звена приведены в табл. 2.8.

Таблица 2.8

| | |
|-------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| | |
| Дифференциальное уравнение | - |
| Передаточная функция | $W(s) = \begin{cases} k, & \omega \in [0, \omega_c] \\ 0, & \omega \notin [0, \omega_c] \end{cases}$ |
| Переходная функция | $h(t) = \frac{\omega_c}{\pi} \int_{t_0}^t \frac{\sin(\omega_c(\tau - t_0))}{\omega_c(\tau - t_0)} d\tau$ |
| Импульсная функция | $w(t) = \frac{\omega_c}{\pi} \frac{\sin(\omega_c(t - t_0))}{\omega_c(t - t_0)}$ |
| Амплитудно-частотная характеристика | $A(\omega) = \begin{cases} k, & \omega \in [0, \omega_c] \\ 0, & \omega \notin [0, \omega_c] \end{cases}$ |
| Фазочастотная характеристика | $\varphi(\omega) = 0$ |

2.7.

На основании частотного метода и частотных характеристик систем можно сделать выводы о прохождении сигналов через системы с известными частотными характеристиками.

Если система не вносит искажений, то ее считают идеальной. Допустим, что сигнал может изменяться по интенсивности (амплитуде) и иметь небольшое запаздывание. Тогда выходной сигнал запишем так: $y(t) = k u(t - \tau)$. Так как $u(t) = 0, t < 0$, то применим преобразование Лапласа к выходному сигналу и $Y(s) = k e^{-s\tau} U(s)$. Тогда передаточная функция идеальной системы примет вид $W(s) = k e^{-s\tau}$. Для идеальной системы связи амплитудно-частотная характеристика является равномерной при всех частотах, а фазо-частотная – имеет постоянный отрицательный наклон. Если ввести понятие групповой задержки канала связи как $\theta(\omega) = -\frac{\partial \varphi(\omega)}{\partial \omega}$, то для идеального канала связи она есть постоянная величина.

2.8.

Идеальная система связи должна иметь бесконечную полосу пропускания и нулевую групповую задержку, что нереально. В качестве бесконечной полосы выберем конечную полосу $[\omega_0; \omega_1]$, в которой сигнал проходит без искажений. Если $\omega_0 \neq 0, \omega_1 \neq \infty$, то фильтр называется полосно-пропускающим или полосовым; если $\omega_0 = 0, \omega_1 \neq \infty$, то фильтром нижних частот; если $\omega_0 \neq \infty, \omega_1 \rightarrow \infty$, то фильтром верхних частот. Для идеального фильтра нижних частот с шириной полосы ω_1 комплексный коэффициент

передачи $K(j\omega) = A(\omega)e^{-j\varphi(\omega)}$, где $A(\omega) = \begin{cases} 1, & |\omega| \leq \omega_1 \\ 0, & |\omega| > \omega_1 \end{cases}$.

Импульсную (весовую) функцию идеального фильтра низких частот определяют как обратное преобразование Фурье от комплексного коэффициента передачи: $w(t) = \frac{\omega_c}{\pi} \text{sinc}(\omega_c(t - t_0))$. Импульсная функция такого фильтра – нереализуемая или непричинная, так как имеет начало в бесконечности и в момент подачи входного сигнала является ненулевой. Но в большинстве практических приложений, когда реальный фильтр рассматривают только в полосе пропускания, его можно трактовать как идеальный и использовать таким в задачах анализа и синтеза.

2.9.

При преобразовании случайного сигнала линейной динамической системой происходит изменение свойств выходного сигнала. Будем считать, что свойства входного сигнала и линейной системы заданы. Необходимо определить свойства выходного случайного сигнала. Если выходной сигнал

представить через интеграл свертки $y(t) = \int_0^{\infty} h(t - \tau) u(\tau) d\tau$, то можно найти

вероятностные характеристики выходного сигнала:

- математическое ожидание $M[y(t)] = \int_0^{\infty} h(t - \tau) M[u(\tau)] d\tau$;

- автокорреляционную функцию

$$M[y(t_1) y(t_2)] = \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} h(t_1 - \tau_1) h(t_2 - \tau_2) K_u(\tau_1 - \tau_2) d\tau_1 d\tau_2;$$

- дисперсию $M[y^2(t)] = \sigma_u^2 \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} h(t - \tau_1) h(t - \tau_2) K_u(\tau_1 - \tau_2) d\tau_1 d\tau_2$;

- взаимно корреляционную функцию

$$M[y(t_1) u(t_2)] = \int_0^{\infty} h(t_1 - \tau_1) K_u(\tau_1 - t_2) d\tau_1.$$

Взаимосвязь характеристик сигналов и системы в частотной области определяют через спектральные плотности мощности сигналов и комплексный коэффициент передачи:

$$S_y(\omega) = K(j\omega) * K(-j\omega) * S_u(\omega).$$

Дисперсия выходного сигнала линейной динамической системы при стационарном входном сигнале

$$\sigma_y^2 = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} S_y(\omega) d\omega = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} K(j\omega) * K(-j\omega) * S_u(\omega) d\omega.$$

Дисперсия выходного сигнала идеального фильтра низких частот при стационарном входном сигнале типа «белого шума» $S_u(\omega) = S_u = const$ определяется выражением

$$\sigma_y^2 = \frac{1}{\pi} \int_{\omega_0}^{\omega_1} k_f^2 S_u(\omega) d\omega = \frac{k_f^2 S_u}{\pi} (\omega_1 - \omega_0).$$

2.10.

В задаче оптимальной фильтрации необходимо по априорным данным полезного сигнала и помехи синтезировать такой фильтр, при прохождении через который полезный сигнал максимально проходил без искажений, а помеха фильтровалась или подавлялась. Наиболее часто задачу фильтрации рассматривают при аддитивной смеси полезного сигнала и помехи как стационарных случайных процессов. Если ввести ошибку фильтрации как разность полезного и фильтрованного сигналов $e(t) = u(t) - \hat{y}(t)$, то критерием фильтрации следует считать дисперсию этой ошибки:

$$\sigma_e^2 = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T e^2(t) dt.$$

Найденный фильтр по данному критерию считаем

Априорными данными в задаче оптимальной фильтрации считаются спектральные плотности мощности сигналов или корреляционные функции

сигналов. Решением задачи может быть оптимальный фильтр в виде импульсной функции или комплексного коэффициента передачи.

2.11.

Решение задачи оптимальной фильтрации, когда структура фильтра определена как идеальный фильтр низких частот с передаточной функцией

$$W_f(s) = A(\omega)e^{-s\tau}, \quad A(\omega) = \begin{cases} k_f, & |\omega| \leq \Delta\omega \\ 0, & |\omega| > \Delta\omega \end{cases},$$

заключается в определении полосы пропускания фильтра $\Delta\omega$ по критерию дисперсии ошибки фильтрации.

Обозначим преобразованные по Лапласу сигналы: $U(s)$ – вход канала связи; $X(s) = k_o e^{-s\tau} U(s)$ – восстанавливаемый сигнал; $Y(s) = U(s) + V(s)$ – выход канала; $V(s)$ – помеха; $\hat{Y}(s)$ – выход фильтра; $E(s) = X(s) - \hat{Y}(s)$ – ошибка фильтрации или $E(s) = X(s) - W_f(s)(U(s) + V(s))$, где $W_f(s)$ – передаточная функция фильтра.

Поскольку спектральная плотность мощности сигнала ошибки фильтрации при некоррелированных сигналах на входе канала связи и помехи представлена выражением

$$S_e(\omega) = \left| k_o e^{-j\omega\tau} - W_f(j\omega) \right|^2 S_u(\omega) + |W_f(j\omega)|^2 S_v(\omega),$$

то дисперсия ошибки при $W_f(s) = \begin{cases} K_f, & |\omega| < \Delta\omega \\ 0, & |\omega| > \Delta\omega \end{cases}$ имеет вид

$$\sigma_e^2 = \frac{k_o^2}{\pi} \int_{-\Delta\omega}^{\Delta\omega} S_u(\omega) d\omega + \frac{k_o^2}{\pi} \int_0^{\Delta\omega} S_v(\omega) d\omega.$$

Первое слагаемое уменьшается, а второе – увеличивается при увеличении частотной полосы $\Delta\omega$, что подтверждает существование оптимальной полосы для искомого идеального фильтра низких частот.

2.12.

Выразим выход фильтра через интеграл свертки $\hat{y}(t) = \int_0^{\infty} h_f(t - \tau) y(\tau) d\tau$,

где $h_f(t)$ – импульсная функция реализуемого фильтра $h_f(t) = \begin{cases} h_f(t), t \geq 0 \\ 0, t < 0 \end{cases}$, и

запишем дисперсию ошибки фильтрации

$$M[e^2(t)] = K_x(0) - 2 \int_0^{\infty} h(\tau) K_{xy}(\tau) d\tau + 2 \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} h(\tau_1) h(\tau_2) K_y(\tau_1 - \tau_2) d\tau_1 d\tau_2.$$

Минимизация дисперсии ошибки как вариационная задача на экстремум приводит к решению относительно импульсной функции следующего интегрального уравнения [7]:

$$K_{xy}(t) = \int_0^{\infty} h(\tau) K_y(t - \tau) d\tau,$$

которое называется уравнением Винера – Хопфа или уравнением оптимальной винеровской фильтрации.

Решение уравнения Винера – Хопфа удобно представить в спектральной области, применив преобразование Фурье к обеим частям:

$$S_{xy}(\omega) = W(j\omega) S_{yy}(\omega),$$

откуда следует решение в частотной области

$$W_{opt}(j\omega) = \frac{S_{xy}(\omega)}{S_{yy}(\omega)}$$

и во временной

$$h_{opt}(t) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} W_{opt}(j\omega) e^{j\omega t} d\omega.$$

Если известны спектральные свойства входного сигнала и помехи, то решение принимает вид

$$W_{opt}(j\omega) = \frac{S_{xx}(\omega)}{S_{xx}(\omega) + S_{vv}(\omega)}.$$

3.

3.1.

В компьютере сигнал можно представить только в дискретном виде как последовательность чисел или как вектор (числовой массив) конечной размерности. Значения сигнала или его отсчеты «привязаны» к определенным значениям времени, поэтому для генерации сигналов необходимо определить интервал времени и шаг временной дискретизации. Генерация временного сигнала состоит из двух этапов – задание вектора (массива) времени и вычисление значений функции для этого массива времени.

Примеры задания массива времени в языке МАТЛАБ (табл. 3.1).

Таблица 3.1

| | |
|------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------|
| | |
| >> t=0:0.1:1; | % время в интервале от 0 до 1с с шагом 0.1 с |
| >> fs=1000; t=0:1/fs:10; | % сигнал с частотой дискретизации 1 кГц в интервале времени от 0 до 10 с |
| >> To=1; Tk=100; Ts=1; >> t=To:Ts:Tk; | % время в интервале от 1 до 100 с с шагом 1 с |

Примеры задания непрерывных функций времени в языке МАТЛАБ (табл. 3.2).

Таблица 3.2

| | |
|----------------------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------|
| | |
| >> t=0:0.1:1; fi=pi/4; omega=2*pi*100; >> x1=cos(omega*t+fi); plot(x1); | % гармонический сигнал с начальной фазой 45 град и частотой 100 Гц |
| >> alpha=1000; t=0:1/fs:10; >> x2=exp(-alpha*t); plot(t,x2); | % сигнал с частотой дискретизации 1 кГц в интервале времени от 0 до 10 с |

Примеры задания кусочно-непрерывных функций времени в языке МАТЛАБ (табл. 3.3).

Таблица 3.3

| | |
|----------------------------------------------------------------------|---------------------------------------------|
| >> t=0:0.1:10; >> x1=1.*(t>1); plot(t,x1); | % сигнал “ступенька” с момента времени 1 с |
| >> al=1000; t=0:1:10;T=5; >> x2=al*t/T.*(t>0).*(t<T); plot(t,x2); | % сигнал треугольной формы на интервале 5 с |

(.3.4)

Таблица 3.4

| | |
|----------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| >> t=0:0.1:10; T=1; >> x=rectpuls(t,T); plot(t,x); | % сигнал - прямоугольный импульс на интервале времени 0.5 с |
| >> t=0:1:10;T=5;skew=1; >> x2=tripuls(t,T, skew); plot(t,x2); | % сигнал - треугольный импульс на интервале времени 5 с с вершиной в точке 2.5 с |
| >> t=-10:0.1:10; >> x=sinc(t/pi); plot(t,x); | % сигнал с ограниченной полосой частот на интервале времени 20 с |
| >> t=-10:0.1:10;fc=1000;bw=0.5;bwr=-6; >> x=gauspuls(t,fc,bw,bwr); plot(t,x); | % гауссовский радиоимпульс с параметрами: fc – несущая частота; bw – относительная ширина спектра (ширина спектра, деленная на несущую); bwr – уровень в децибелах относительной ширины спектра |

(.3.5)

Таблица 3.5

| | |
|------------------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| >> T=1;Tf=10;Ts=0.01; >>[x,t]=gensig('sin',T,Tf,Ts); plot(t,x); | % гармонический сигнал на интервале времени 10 с с периодом 1 с и частотой квантования 100 Гц |
| >> T=1; Tf=10;Ts=0.01; >>[x,t]=gensig('square',T,Tf,Ts); plot(t,x); | % периодический прямоугольный биполярный сигнал на интервале времени 10 с с периодом 1 с и частотой квантования 100 Гц |
| >> T=1; Tf=10;Ts=0.01; >>[x,t]=gensig('pulse',T,Tf,Ts); plot(t,x); | % периодический прямоугольный однополярный сигнал на интервале времени 10 с с периодом 1 с и частотой квантования 100 Гц |

Окончание табл. 3.5

| | |
|-------------------------------------------------------------------------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| | |
| >> t=0:0.001:10;f0=1;f1=100;t1=10; >>x=chirp(t,f0,t1,f1); plot(t,x); | % гармонический сигнал с изменяющейся частотой на интервале времени 10 с от 1 Гц до 100 Гц |
| >> t=0:0.001:10;dyt=50; >>x=square(t,dyt); plot(t,x); | % последовательность прямоугольных биполярных импульсов, dyt – отношение длительности импульса к периоду в процентах |

(.3.6)

Таблица 3.6

| | |
|-------------------------------|----------------------------------------------------------------------------------------|
| | |
| >>n=100;x=rand(1,n);plot(x); | % случайный дискретный сигнал с равномерным распределением в интервале (0;1) |
| >>n=100;x=randn(1,n);plot(x); | % случайный дискретный сигнал с нормальным распределением (среднее – 0, дисперсия – 1) |
| >> n=25;hist(x,n) | % построение гистограммы по 25 интервалам |

3.2.

(.3.7)

Таблица 3.7

| | |
|----------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------------|
| | |
| >>n=128;Fs=200;X=fft(x,n); >>plot(abs(X),(0:n-1)/(n-1)*Fs); | % дискретное преобразование Фурье сигнала по 128 отсчетам, построение графика АЧХ |
| >> n=256;x=ifft(X,n); | % дискретное обратное преобразование Фурье сигнала по 256 отсчетам комплексного спектра X |

3.3.

(3.8)

Таблица 3.8

| | |
|-------------------------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| >>a=[2 3 1];b=[1 0];X=freqs(b,a); | % вычисление комплексного коэффициента передачи |
| >>a=[2 3 1];b=[1 0]; [X,w]=freqs(b,a); >>plot(w,abs(X)); grid on | % вычисление комплексного коэффициента передачи для набора частот и построение АЧХ в линейном масштабе |
| >>a=[2 3 1];b=[1 0]; [X,w]=freqs(b,a); >>plot(w, unwrap (angle(X))*180/pi) | % вычисление комплексного коэффициента передачи для набора частот и построение ФЧХ в линейном масштабе |
| >>a=[2 3 1];b=[1 0]; sys=tf(b,a); >> bode(sys) | % построение АЧХ и ФЧХ фильтра в логарифмическом масштабе |

3.4.

(3.9)

Таблица 3.9

| | |
|-------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| >>a=[2 3 1];b=[1 0];sys=tf(b,a); | % задание фильтра (системы) в форме передаточной функции |
| >>z=[2 3 1];p=[1 0];k=[1]; >>sys=zpk(z,p,k); | % задание фильтра (системы) в форме передаточной функции через нули, полюсы и коэффициент усиления фильтра |
| >>[z,p,k]=tf2zpk(b,a) | % преобразование формы TF в форму ZPK |
| >>[num.den]=zp2tf(z,p,k) | % преобразование формы ZPK в форму TF |

(3.10)

Таблица 3.10

| | |
|---------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| >>a=[2 3 1];b=[1 0];Ts=0.1; >>sys=tf(b,a,Ts); | % задание дискретного фильтра (системы) в форме передаточной функции |
| >>z=[2 3 1];p=[1 0];k=[1]; Ts=0.1; >>sys=zpk(z,p,k); | % задание дискретного фильтра (системы) в форме передаточной функции через нули, полюсы и коэффициент усиления фильтра |
| >>[z,p,k]=tf2zpk(b,a) | % преобразование формы TF в форму ZPK |

4.

1

«Изучение инструментальных средств моделирования сигналов в среде МАТЛАБ»

Цель работы – изучить средства МАТЛАБ для моделирования детерминированных и случайных сигналов с заданными параметрами.

Исходные данные – вид сигнала, значения параметров сигнала представлены в табл. 4.1.

Порядок выполнения лабораторной работы

1. Ознакомиться с основами теории сигналов (см. разд. 1).
2. Получить вариант работы у преподавателя.
3. Загрузить систему МАТЛАБ в компьютер.
4. Создать скрипт-файл лабораторной работы.
5. Построить графики сигналов и перенести их в отчет.
6. Загрузить систему СИМУЛИНК.
7. Сгенерировать сигнал, используя блоки системы СИМУЛИНК.
8. Построить графики сигналов с помощью блоков библиотеки Sinks и Sources.
9. Оформить отчет.

Выполнение лабораторной работы

. Найти на рабочем столе компьютера иконку системы МАТЛАБ и произвести запуск. При отсутствии иконки выполнить запуск через последовательность операций ПУСК-ПРОГРАММЫ-МАТЛАБ.

- . Открыть новый М-файл на панели инструментов для создания программы, набрать необходимые команды МАТЛАБа для выполнения работы. Сохранить программу в рабочем каталоге.

Таблица 4.1

| Номер варианта | Вид сигнала | Параметры сигнала | | |
|----------------|----------------------------------------------------------|-----------------------|---------------|----------|
| | | амплитуда | частота, Гц | время, с |
| 1 | Ступенька («скачок») | 10 | - | 10 |
| 2 | Ступенька («скачок») | 100 | - | 50 |
| 3 | Ступенька («скачок») | 1 | - | 10 |
| 4 | Биполярный прямоугольный периодический сигнал («меандр») | 10 | 1 | 10 |
| 5 | Биполярный прямоугольный периодический сигнал («меандр») | 1 | 10 | 1 |
| 6 | Биполярный прямоугольный периодический сигнал («меандр») | 10 | 100 | 0.1 |
| 7 | Биполярный прямоугольный периодический сигнал («меандр») | 0.1 | 1 000 | 0.01 |
| 8 | Однополярный прямоугольный периодический сигнал | 0.5 | 10 | 1 |
| 9 | Однополярный прямоугольный периодический сигнал | 1 | 100 | 0.1 |
| 10 | Однополярный прямоугольный периодический сигнал | 10 | 1 000 | 0.01 |
| 11 | Однополярный прямоугольный периодический сигнал | 0.1 | 1 0000 | 0.001 |
| 12 | Гармонический сигнал | 1 | 10 | 1 |
| 13 | Гармонический сигнал | 10 | 100 | 0.1 |
| 14 | Гармонический сигнал | 0.1 | 1000 | 0.01 |
| 15 | Периодический сигнал с линейно нарастающей амплитудой | От 1 до 10 | 10 | 10 |
| 16 | Периодический сигнал с линейно нарастающей амплитудой | От 100 до 500 | 1 00 | 0.1 |
| 17 | Периодический сигнал с линейно нарастающей амплитудой | От 0.01 до 1 | 1 000 | 0.01 |
| 18 | Периодический сигнал с линейно нарастающей частотой | 1 | от 1 до 10 | 1 |
| 19 | Периодический сигнал с линейно нарастающей частотой | 5 | от 10 до 100 | 0.1 |
| 20 | Периодический сигнал с линейно нарастающей частотой | 10 | от 100 до 300 | 0.1 |
| 21 | Случайный сигнал с нормальным распределением | МО* - 1 СКО* - 0.5 | - | 1 |
| 22 | Случайный сигнал с нормальным распределением | МО - 10 СКО - 1 | | 0.1 |
| 23 | Случайный сигнал с нормальным распределением | МО - 100 СКО - 5 | - | 0.1 |
| 24 | Случайный сигнал с нормальным распределением | МО - 0 СКО - 0.1 | - | 1 |

*МО – математическое ожидание, СКО – среднее квадратическое отклонение.

. Запустить программу путем ввода имени программы в командном окне МАТЛАБа. При сообщении ошибок выполнить необходимые исправления.

. Загрузить систему СИМУЛИНК посредством нажатия клавиши на инструментальной панели системы или ввода команды `simulink` в командном окне МАТЛАБа. Открыть новое окно для создания блок-схемы моделирования сигналов. Выбрать последовательно библиотеки **Sinks**, **Source** для «перетаскивания» необходимых блоков в рабочее окно. Соединить блоки и выполнить моделирование с помощью клавиши **Start**. Результаты моделирования перенести в отчет.

Контрольные вопросы

1. Дайте определение сигнала как процесса передачи сообщения.
2. Укажите признаки классификации сигналов.
3. Назовите способы представления сигналов.
4. Дайте определение детерминированного непрерывного сигнала.
5. Дайте определение детерминированного непрерывного сигнала, ограниченного по энергии.
6. Дайте определение детерминированного дискретного сигнала.
7. Дайте определение финитного и казуального сигналов.
8. Перечислите виды специальных сигналов.

Справочные сведения

Справочные сведения по данной работе даны в подразд. 3.2.

Содержание отчета

: цель работы, вариант задания, скрипт-файл генерации сигналов, блок-схему генерации сигналов в системе СИМУЛИНК, формы полученных сигналов.

«Дискретное преобразование Фурье с помощью инструментальных средств МАТЛАБ»

Цель работы – изучить средства МАТЛАБ для определения спектральных характеристик детерминированных дискретных сигналов и исследовать спектральные характеристики сигнала заданного варианта.

Исходные данные – вид сигнала, значения параметров сигнала, время квантования (табл. 4.2).

Порядок выполнения лабораторной работы

1. Ознакомиться с основами теории преобразования Фурье (см. разд. 2).
2. Получить вариант работы у преподавателя.
3. Загрузить систему МАТЛАБ в компьютер.
4. Создать скрипт-файл лабораторной работы.
5. Построить графики сигналов и перенести их в отчет.
6. Загрузить систему СИМУЛИНК.
7. Сгенерировать сигнал с помощью блоков системы СИМУЛИНК.
8. Выполнить спектральный анализ сигналов с помощью блоков **Power Spectral Density**, **Averaging Power Spectral Density** библиотеки блоков **Simulinks Extras – Additional Sinks**.
9. Построить графики спектров сигналов.
10. Оформить отчет.

Выполнение лабораторной работы

. Найти на рабочем столе компьютера иконку системы МАТЛАБ и произвести запуск. При отсутствии иконки выполнить запуск через последовательность операций ПУСК-ПРОГРАММЫ-МАТЛАБ.

- . Открыть новый М-файл на панели инструментов для создания программы лабораторной работы. Набрать необходимые команды МАТЛАБа для выполнения работы. Сохранить программу в рабочем каталоге.

Таблица 4.2

| Но- мер вари- анта | Вид сигнала | Параметры сигнала | | |
|-----------------------------|---------------------------------------------------------------|---------------------|------------------|------------------------------|
| | | амплитуда | частота, Гц | время квантова- ния, с |
| 1 | Ступенька (скачок) | 10 | - | 1 |
| 2 | Ступенька (скачок) | 100 | - | 0.2 |
| 3 | Ступенька (скачок) | 1 | - | 0.01 |
| 4 | Биполярный прямоугольный пе- риодический сигнал («меандр») | 10 | 1 | 0.1 |
| 5 | Биполярный прямоугольный пе- риодический сигнал («меандр») | 1 | 10 | 0.02 |
| 6 | Биполярный прямоугольный пе- риодический сигнал («меандр») | 10 | 100 | 0.0005 |
| 7 | Биполярный прямоугольный пе- риодический сигнал («меандр») | 0.1 | 1 000 | 0.00003 |
| 8 | Однополярный прямоугольный периодический сигнал | 0.5 | 10 | 0.03 |
| 9 | Однополярный прямоугольный периодический сигнал | 1 | 100 | 0.004 |
| 10 | Однополярный прямоугольный периодический сигнал | 10 | 1 000 | 0.000025 |
| 11 | Однополярный прямоугольный периодический сигнал | 0.1 | 1 0000 | 0.00001 |
| 12 | Гармонический сигнал | 1 | 10 | 0.02 |
| 13 | Гармонический сигнал | 10 | 100 | 0.003 |
| 14 | Гармонический сигнал | 0.1 | 1000 | 0.0002 |
| 15 | Периодический сигнал с линейно нарастающей амплитудой | От 1 до 10 | 10 | 0.005 |
| 16 | Периодический сигнал с линейно нарастающей амплитудой | От 100 до 500 | 1 00 | 0.00004 |
| 17 | Периодический сигнал с линейно нарастающей амплитудой | От 0.01 до 1 | 1 000 | 0.00003 |
| 18 | Периодический сигнал с линейно нарастающей частотой | 1 | от 1 до 10 | 0.01 |
| 19 | Периодический сигнал с линейно нарастающей частотой | 5 | от 10 до 100 | 0.001 |
| 20 | Периодический сигнал с линейно нарастающей частотой | 10 | от 100 до 300 | 0.0003 |
| 21 | Случайный сигнал с нормальным распределением | МО - 1 СКО – 0.5 | - | 0.1 |
| 22 | Случайный сигнал с нормальным распределением | МО - 10 СКО – 1 | - | 0.1 |
| 23 | Случайный сигнал с нормальным распределением | МО - 100 СКО – 5 | - | 0.1 |
| 24 | Случайный сигнал с нормальным распределением | МО - 0 СКО – 0.1 | - | 0.1 |

*МО – математическое ожидание, СКО – среднее квадратическое отклонение.

. Запустить программу путем ввода имени программы в командном окне МАТЛАБа. При сообщении ошибок выполнить необходимые исправления.

. Загрузить систему СИМУЛИНК посредством нажатия клавиши на инструментальной панели системы или ввода команды `simulink` в командном окне МАТЛАБа. Открыть новое окно для создания блок-схемы моделирования сигналов. Выбрать последовательно библиотеки **Sinks**, **Sourse** и **Simulinks Extras** для «перетаскивания» блоков в рабочее окно. Соединить блоки и выполнить моделирование путем нажатия клавиши **Start**. Результаты моделирования перенести в отчет.

Контрольные вопросы

1. Что понимают под спектром сигнала?
2. Дайте определение комплексного спектра.
3. Назовите условие разложения сигнала в ряд Фурье (условие Дирихле).
4. Приведите комплексный вид ряда Фурье.
5. Что такое практическая ширина спектра?
6. Как определяют амплитудный и фазовый спектры сигнала?
7. Линейные свойства преобразования Фурье.
8. Преобразования Фурье от производной и интеграла функции.
9. Преобразования Фурье от свертки функции.
10. Преобразования Фурье от дельта-функции.
11. Преобразования Фурье от одиночного импульса.

Справочные сведения

Справочные сведения по данной работе даны в подразд. 3.3.

Примеры скрипт-файлов

```
1.
t = 0:0.001:0.6;           %время
x = sin(2*pi*50*t)+sin(2*pi*120*t); %сигнал
y = x + 2*randn(size(t)); %сигнал с ошибкой
plot(1000*t(1:50),y(1:50)); %график сигнала
xlabel('time (milliseconds)');
Y = fft(y,512);           %преобразование Фурье
Pyy = Y.* conj(Y) ;       %модуль преобразования Фурье
f = 1000*(0:256)/512;     %вектор половины частоты дискретиза-
                          %ции
plot(f,Pyy(1:257)); %график амплитудного спектра на половине частоты
title('Frequency content of y')
xlabel('frequency (Hz)')

2.
t = 0:1/100:10-1/100;     %время
x = sin(2*pi*15*t) + sin(2*pi*40*t); %сигнал
y = fft(x);               %преобразование Фурье
m = abs(y);                %модуль комплексного спектра
p = unwrap(angle(y));     %фаза комплексного спектра
f = (0:length(y)-1)*100/length(y); % частота в герцах
subplot(2,1,1), plot(f,m),
ylabel('Abs. Magnitude'), grid on
subplot(2,1,2), plot(f,p*180/pi)
ylabel('Phase [Degrees]'), grid on
xlabel('Frequency [Hertz]')
```

Содержание отчета

: основные формулы о преобразовании Фурье, вариант задания, скрипт-файл генерации сигналов и их обработку, блок-схему генерации сигналов и вычисления спектральных характеристик, формы полученных спектров, форму теоретического спектра сигнала, выводы по анализу спектров сигналов.

3

«Дискретное обратное преобразование Фурье и фильтрация сигналов»

Цель работы – изучить средства МАТЛАБ для определения характеристик детерминированных сигналов с известными спектральными свойствами

и научиться решать задачу фильтрации на основе обратного преобразования Фурье.

Исходные данные – данные для работы взять из табл. 4.2.

Порядок выполнения лабораторной работы

1. Получить вариант работы у преподавателя.
2. Загрузить систему МАТЛАБ в компьютер.
3. Создать скрипт-файл лабораторной работы.
4. Построить графики сигналов его спектра и перенести их в отчет.
5. Ограничить спектр сигнала, оставив в спектре основные гармоники.
6. Построить графики восстановленных сигналов.
7. Оформить отчет.

Выполнение лабораторной работы

. Найти на рабочем столе компьютера иконку системы МАТЛАБ и произвести запуск. При отсутствии иконки выполнить запуск через последовательность операций ПУСК-ПРОГРАММЫ-МАТЛАБ.

- . Открыть новый М-файл на панели инструментов для создания программы лабораторной работы. Набрать необходимые команды МАТЛАБа для выполнения работы:

1. Построить спектр сигнала для варианта из лабораторной работы № 2.
2. Построить график амплитудного спектра.
3. Сформировать массив комплексного спектра как часть основного спектра с учетом спектральных свойств сигнала.
4. Восстановить сигнал по усеченному спектру.

. Запустить программу путем ввода имени программы в командном окне МАТЛАБа. При сообщении ошибок сделать необходимые исправления.

Контрольные вопросы

1. Понятие комплексного спектра.
2. Что является результатом прямого и обратного преобразования Фурье?
3. В чем отличие непрерывного и дискретного преобразования Фурье?
4. Для какого числа отсчетов дискретного сигнала можно вычислить быстрое дискретное преобразование Фурье?
5. Какой диапазон частот необходимо использовать при восстановлении сигналов?
6. Какой вид имеет амплитудная характеристика эквивалентного фильтра с усеченным спектром при обратном преобразовании Фурье?
7. Какой вид имеет импульсная характеристика эквивалентного фильтра с усеченным спектром при обратном преобразовании Фурье?

Справочные сведения

Перечень команд МАТЛАБа для определения спектра сигнала и фильтрации дан в следующем примере.

Пример.

```
t = 0:0.001:0.512;           %время
x = sin(2*pi*5*t)+sin(2*pi*12*t); %сигнал
y = x + 0*randn(size(t));    %сигнал с ошибкой
n=512;                       %число отсчетов
figure(1)
plot(t(1:n),y(1:n));grid;    %график сигнала
title('Signal Corrupted with Zero-Mean Random Noise');
xlabel('time (milliseconds)');
Y = fft(y,n);                %преобразование Фурье
Pyy = Y.* conj(Y) / n;       %модуль преобразования Фурье
f = 1000*(0:n)/n;           %половина частоты дискретизации
figure(2)
plot(f(1:100),Pyy(1:100));grid; %график АЧХ
title('Frequency content of y')
xlabel('frequency (Hz)')
%***** обратное преобразование Фурье*****
N=100;
Y1=[Y(1:N) zeros(1,n-N)];   %усечение спектра сигнала
figure(3)
x1=ifft(Y1,n);              %обратное преобразование Фурье
plot(t(1:n),2*x1(1:n),t(1:n),y(1:n)),grid;
```

Содержание отчета

Отчет должен содержать: цель работы, вариант задания, скрипт-файл генерации сигнала, спектральную характеристику и восстановленный сигнал, амплитудный спектр фильтра, графики сигналов и спектров, выводы.

4

«Определение характеристик случайных сигналов»

Цель работы – изучить средства МАТЛАБ для определения характеристик случайных сигналов с известными параметрами и приобрести навыки проведения анализа с помощью библиотеки `SP Toolbo ks`.

Исходные данные – параметры сигнала заданы математическим ожиданием, дисперсией и видом распределения, а варианты параметров представлены в табл. 4.3.

Порядок выполнения лабораторной работы

1. Получить вариант работы у преподавателя.
2. Загрузить систему МАТЛАБ в компьютер.
3. Создать скрипт-файл лабораторной работы.
4. Построить графики и перенести их в отчет.
5. Оформить отчет.

Выполнение лабораторной работы

1. Определить интервал времени, период квантования сигнала и сгенерировать два сигнала с заданными параметрами варианта, построить графики сигналов посредством команды `plot`.
2. Построить гистограмму распределения вероятности (функцию плотности вероятности) с помощью команды `hist`.

3. Оценить числовые характеристики сигналов: математическое ожидание, дисперсию, среднее квадратическое отклонение, коэффициент взаимной корреляции двух сигналов.

Таблица 4.3

| Номер варианта | Параметры сигнала | | Вид распределения |
|----------------|-------------------------|-----------|-------------------|
| | Математическое ожидание | Дисперсия | |
| 1 | 0.1 | 1.5 | Равномерный |
| 2 | 1.0 | 2.0 | Гауссовский |
| 3 | 5.0 | 1.0 | Равномерный |
| 4 | 10.0 | 1.0 | Гауссовский |
| 5 | 20.0 | 5.0 | Равномерный |
| 6 | 30.0 | 10.0 | Гауссовский |
| 7 | 3.0 | 1.0 | Равномерный |
| 8 | 5.0 | 2.0 | Равномерный |
| 9 | 7.0 | 8.0 | Гауссовский |
| 10 | 9.0 | 5.0 | Равномерный |
| 11 | 10.0 | 6.0 | Гауссовский |
| 12 | 1.5 | 0.1 | Равномерный |
| 13 | 2.0 | 1.0 | Гауссовский |
| 14 | 1.0 | 5.0 | Равномерный |
| 15 | 1.0 | 10.0 | Гауссовский |
| 16 | 5.0 | 20.0 | Равномерный |
| 17 | 10.0 | 30.0 | Гауссовский |
| 18 | 1.0 | 3.0 | Равномерный |
| 19 | 2.0 | 5.0 | Гауссовский |
| 20 | 8.0 | 7.0 | Равномерный |
| 21 | 5.0 | 9.0 | Гауссовский |
| 22 | 6.0 | 10.0 | Равномерный |
| 23 | 1.5 | 0.1 | Гауссовский |
| 24 | 2.0 | 1.0 | Равномерный |

4. Определить функциональные характеристики сигналов: нормированную автокорреляционную функцию и нормированную взаимно корреляционную функцию.

5. Определить вид функции плотности распределения в зависимости от числовых параметров распределения (математическое ожидание и дисперсия) с помощью функции `disttool`.

Контрольные вопросы

1. Понятие случайной величины и функции.

2. Функциональные характеристики случайных величин и функций.
3. Определение математического ожидания.
4. Определение центрального момента к-го порядка.
5. Свойство функции плотности распределения.
6. Перечислите числовые характеристики случайных функций.
7. В чем отличие понятия ковариации от корреляции?
8. В чем отличие понятия случайного сигнала и случайного процесса?
9. Понятие стационарного случайного процесса.
10. Понятие эргодического случайного процесса.

Справочные сведения

Пример.

```

t = 0:0.001:0.512;           %время
x1 =rand(size(t));           %сигнал 1
x2 =rand(size(t));           %сигнал 2
n=512;
figure(1)
plot(t(1:n),x1(1:n),t(1:n),x2(1:n));grid;   %графики сигналов
title('Signal Corrupted');
xlabel('time (milliseconds)');
figure(2)
subplot(1,1,1)
hist(x1,20);hist(x2,20)           % функции плотности по данным сигналов
x1m=mean(x1);x2m=mean(x2);         % математическое ожидание (1-й момент)
x1_std=std(x1);x2_std=std(x2);     % СКО
x1_disp=x1_std^2;x2_disp=x2_std^2; % дисперсия
x1_cov=cov(x1);x2_cov=cov(x2);     %ковариация (2-й момент)
R = corrcoef(x1,x2);               %коэффициент корреляции
figure(3)
subplot(2,1,1)
X_corr=xcov(x1);                   % корреляционная функция
plot(X_corr/n/x1_disp);
subplot(2,1,2)
X1X2_cor=xcov(x1,x2)/(x1_std*x2_std)/n; %взаимная корреляционная
plot(X1X2_cor)                   % функция

```

Содержание отчета

Отчет должен содержать: основные выражения числовых и функциональных характеристик случайных сигналов, вариант задания, скрипт-файл

генерации случайных сигналов и их обработку, графики функциональных характеристик, выводы по анализу свойств случайных сигналов.

5

«Определение характеристик линейных стационарных систем с помощью инструментальных средств МАТЛАБ»

Цель работы – изучить средства МАТЛАБ для определения характеристик линейных стационарных систем и приобрести навыки проведения анализа динамических систем.

Исходные данные – параметры системы заданы коэффициентами числителя и знаменателя передаточной функции, а варианты параметров представлены в табл. 4.4.

Порядок выполнения лабораторной работы

1. Получить вариант работы у преподавателя.
2. Загрузить систему МАТЛАБ в компьютер.
3. Создать скрипт-файл анализа динамической системы варианта:
 - задать систему в форме `tf`;
 - перевести систему в форму `zpk`;
 - определить временные характеристики (переходную – командой `step`, импульсную – командой `impuls`);
 - найти частотные характеристики (в линейном масштабе командой `freq`, в логарифмическом масштабе командой `bode`).
4. Построить графики и перенести их в отчет.
5. Оформить отчет.

Выполнение лабораторной работы

. Найти на рабочем столе компьютера иконку системы МАТЛАБ и произвести запуск. При отсутствии иконки вы-

полнить запуск через последовательность операций ПУСК-ПРОГРАММЫ-МАТЛАБ.

- . Открыть новый М-файл на панели инструментов для создания программы.

. Запустить программу путем ввода имени программы в командном окне МАТЛАБа. При сообщении ошибок выполнить необходимые исправления.

Таблица 4.4

| | | |
|----|---------------------------------------------|----------------------------------------------------|
| | | |
| 1 | 0.1 | $(1.5s + 1)(3s+1)^2$ |
| 2 | 1.0 | $((1/5)s)^2 + 2 \cdot 1/5 \cdot 0.1s + 1)(3s+1)$ |
| 3 | 5.0 | $((1/5)s)^2 + 2 \cdot 1/5 \cdot 0.1s + 1)s$ |
| 4 | 10.0 | $(2.5s+1)(5s+1)^2$ |
| 5 | 20.0 | $((1/50)s)^2 + 2 \cdot 1/50 \cdot 0.1s + 1)(5s+1)$ |
| 6 | 30.0 | $((1/50)s)^2 + 2 \cdot 1/50 \cdot 0.1s + 1)s$ |
| 7 | 3.0 | $(0.1s+1)^2 (0.3s+1)$ |
| 8 | 5.0 | $((5s)^2 + 2 \cdot 5 \cdot 0.1s + 1) (5s+1)$ |
| 9 | 7.0 | $((1/50)s)^2 + 2 \cdot 1/50 \cdot 0.1s + 1)s^2$ |
| 10 | s+1 | $(1.5s+1)(3s+1)^2$ |
| 11 | (s+2)(s-1) | $((1/5)s)^2 + 2 \cdot 1/5 \cdot 0.1s + 1)(3s+1)$ |
| 12 | (s+5)(s-2) | $((1/5)s)^2 + 2 \cdot 1/5 \cdot 0.1s + 1)s$ |
| 13 | (s+1)(s-1) | $(2.5s+1)(5s+1)^2$ |
| 14 | $((1/30s)^2 + 2 \cdot 1/30 \cdot 0.1s + 1)$ | $((1/50)s)^2 + 2 \cdot 1/50 \cdot 0.1s + 1)(5s+1)$ |
| 15 | 1.0 | $((1/50)s)^2 + 2 \cdot 1/50 \cdot 0.1s + 1)s$ |
| 16 | 5.0 | $(0.1s+1)^2 (0.3s+1)$ |
| 17 | $((3s)^2 + 2 \cdot 3 \cdot 0.1s + 1)$ | $((5s)^2 + 2 \cdot 5 \cdot 0.1s + 1) (5s+1)$ |
| 18 | (s+1)^2 | $((1/50)s)^2 + 2 \cdot 1/50 \cdot 0.1s + 1)s^2$ |
| 19 | (1.5s+1)(3s+1) | $((1/50)s)^2 + 2 \cdot 1/50 \cdot 0.1s + 1)s^2$ |
| 22 | 8.0 | $((1/50)s)^2 + 2 \cdot 1/50 \cdot 0.4s + 1)(5s+1)$ |
| 23 | 5.0 | $((1/50)s)^2 + 2 \cdot 1/50 \cdot 0.4s + 1)s$ |
| 24 | 6.0 | $(0.1s+1)^2 (0.3s+1)$ |
| 25 | 1.5 | $((5s)^2 + 2 \cdot 5 \cdot 0.4s + 1) (5s+1)$ |
| 26 | 2.0 | $((1/50)s)^2 + 2 \cdot 1/50 \cdot 0.4s + 1)s^2$ |

* s –

Контрольные вопросы

1. Какие формы используют для описания линейных динамических систем?
2. Дайте определение импульсной функции.
3. Дайте определение переходной функции.
4. Дайте определение передаточной функции.
5. Дайте определение комплексного коэффициента передачи.
6. Дайте определение амплитудно-частотной характеристики.
7. Дайте определение фазочастотной характеристики.
8. Дайте определение амплитудно-фазочастотной характеристики.
9. Дайте определение логарифмической амплитудной и логарифмической фазовой частотных характеристик.

Справочные сведения

Справочные сведения о командах содержатся в подразд. 3.3 и 3.4.

Пример.

```
clc
clf
Num=[1 2];Den=[4 5 6];
sys_tf=tf(Num,Den)      % форма tf
[z,p,k]=tf2zp(Num,Den);
sys_zpk=zpk(z,p,k)      % форма zpk
figure(1)
step(sys_tf)            % переходная функция
damp(sys_tf)            % полюса системы

figure(2)
impulse(sys_tf)         % импульсная функция

[X,w]=freqs(Num,Den);  % комплексный коэффициент передачи
figure(3)
subplot(2,1,1)
plot(w,abs(X),grid on  % АЧХ
subplot(2,1,2)
plot(w,unwrap(angle(X))*180/pi),grid on % ФЧХ
figure(4)
bode(sys_tf),grid on   % ЛАЧХ
nyquist(sys_tf)         % АФЧХ
```

Содержание отчета

Отчет должен содержать: вариант задания на работу, выражения передаточной функции в двух формах, скрипт-файл лабораторной работы, графики временных и частотных характеристик.

Библиографический список

1. Финк Л.М. Теория передачи дискретных сообщений. – М.: Сов. радио, 1970. – 276 с.
2. Сергиенко А.Б. Цифровая обработка сигналов. – СПб: Питер, 2002. – 608 с.
3. Скляр Б. Цифровая связь. Теоретические основы и практическое применение. – М. – СПб – К.: Вильямс, 2003. – 1099 с.
4. Прокис Дж. Цифровая связь. – М.: Радио и связь, 2000. – 964 с.
5. Френкс Л. Теория сигналов: Пер. с англ. – М.: Сов. радио, 1974. – 344 с.
6. Волощук Ю.І. Сигнали та процеси у радіотехніці: Підручник для студентів вищих навчальних закладів: В 2т. – Х.: "Компанія СМІТ", 2003. – Т.1 – 345 с. – Т.2. – 356 с.
7. Основы цифровой обработки сигналов: Курс лекций / Солонина А.И., Улахович Д.А., Арбузов С.М., Соловьева Е.Б., Гук И.И. - СПб: БХВ-Петербург, 2003. – 608 с.

Кортунов Вячеслав Иванович
Лукин Владимир Васильевич

ОСНОВЫ ТЕОРИИ ЦИФРОВОЙ СВЯЗИ

Редактор В.И. Филатова

Св. план, 2006

Подписано в печать 01.02.2006

Формат 60x84 1/16. Бум. офс. №2. Офс. печ.

Усл. печ. л. 3,6. Уч.-изд. л. 4,06. Т. 50 экз. Заказ 76. Цена свободная

Национальный аэрокосмический университет им. Н.Е. Жуковского

«Харьковский авиационный институт»

61070, Харьков-70, ул. Чкалова, 17

<http://www.khai.edu>

Издательский центр «ХАИ»

61070, Харьков-70, ул. Чкалова, 17

izdat@khai.edu

