

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ УКРАИНЫ  
Национальный аэрокосмический университет им. Н.Е. Жуковского  
«Харьковский авиационный институт»

С.Н. Барсуков

ТЕОРИЯ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО ПОЛЯ.  
ИЗЛУЧЕНИЕ И ДИФРАКЦИЯ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ВОЛН

Учебное пособие

Харьков «ХАИ» 2009

УДК [537.8+537.874.6] (075.8)

Барсуков С.Н. Теория электромагнитного поля. Излучение и дифракция электромагнитных волн: учеб. пособие / С.Н. Барсуков. – Х.: Нац. аэрокосм. ун-т «Харьк. авиац. ин-т», 2009 – 37 с.

Рассмотрены основные принципы теории излучения электромагнитных волн. Решена задача анализа поля дифракции Френеля на отверстии и крае экрана.

Для студентов факультета радиотехнических систем летательных аппаратов при изучении части 4 лекционного курса «Техническая электродинамика».

Ил. 17. Библиогр.: 4 назв.

Рецензенты: канд. техн. наук А.А. Приемко  
канд. техн. наук, доц. Е.А. Милькевич

©Национальный аэрокосмический университет им. Н.Е. Жуковского  
«Харьковский авиационный институт», 2009 г.

# 1. ИЗЛУЧЕНИЕ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ВОЛН

## 1.1. Общая задача излучения. Электродинамические потенциалы

**Излучение** – это процесс передачи энергии электромагнитного поля от источника в окружающее пространство. Энергетической численной характеристикой процесса является вектор Пойнтинга  $\bar{P}$ .

Поток вектора Пойнтинга через замкнутую поверхность, охватывающую источник, определяет величину излучаемой энергии за единицу времени:

$$N = \int_S \bar{P} d\bar{S}.$$

**Источник** электромагнитного поля – это источник неэлектромагнитного характера, который задается величиной стороннего тока  $\bar{j}_{CT}$  (сторонний источник). Поле излучения определяется из решения системы уравнений Максвелла при заданной плотности тока  $\bar{j}_{CT}$ :

$$\begin{cases} \text{rot}\bar{H} = \varepsilon \frac{\partial \bar{E}}{\partial t} + \bar{j}_{CT}; \\ \text{rot}\bar{E} = -\mu \frac{\partial \bar{H}}{\partial t}. \end{cases} \quad (1.1)$$

Получим уравнение, в которое входит только вектор  $\bar{H}$  или  $\bar{E}$ . Применим операцию ротора к обеим частям первого уравнения:

$$\text{rot rot}\bar{H} = \text{rot} \left[ \varepsilon \frac{\partial \bar{E}}{\partial t} + \bar{j}_{CT} \right]. \quad (1.2)$$

Операция ротора соответствует векторному произведению формального вектора набла  $\nabla$  и данного вектора  $\bar{H}$ :

$$\begin{aligned} \text{rot rot}\bar{H} &= \nabla \times \nabla \times \bar{H} = \bar{a} \times \bar{b} \times \bar{c} = \bar{b}(\bar{a} \cdot \bar{c}) - \bar{c}(\bar{a} \cdot \bar{b}) = \\ &= \nabla(\nabla \cdot \bar{H}) - \bar{H}(\nabla \cdot \nabla). \end{aligned} \quad (1.2a)$$

Запишем это выражение через операторы теории поля:

- $\nabla \cdot \nabla = \nabla^2$  – лапласиан, который является результатом скалярного произведения;
- $\psi = \nabla \bar{H} = \text{div}\bar{H}$  – дивергенция (плотность потока), являющаяся скалярной функцией;

- $\nabla \psi = \text{grad} \psi$  – набла от скалярной функции, которая представляет собой векторную величину (градиент).

С учетом этих операторов уравнение (1.2а) принимает следующий вид:

$$\text{rot rot } \bar{H} = \text{grad div } \bar{H} - \nabla^2 \bar{H} = -\nabla^2 \bar{H},$$

где первое слагаемое равно нулю, так как из уравнения Максвелла следует нулевое значение дивергенции, т.е.  $\text{div} \bar{H} = 0$ .

Преобразуем правую часть уравнения (1.2):

$$\begin{aligned} \text{rot} \left[ \varepsilon \frac{\partial \bar{E}}{\partial t} + \bar{j}_{CT} \right] &= \text{rot} \left[ \varepsilon \frac{\partial \bar{E}}{\partial t} \right] + \text{rot} \bar{j}_{CT} = \varepsilon \frac{\partial}{\partial t} [\text{rot} \bar{E}] + \text{rot} \bar{j}_{CT} = \\ &= -\varepsilon \mu \frac{\partial}{\partial t} \left[ \frac{\partial \bar{H}}{\partial t} \right] + \text{rot} \bar{j}_{CT}. \end{aligned}$$

Здесь  $\text{rot} \bar{E}$  заменен в соответствии со вторым уравнением Максвелла (1.1).

Окончательно запишем полученное уравнение Даламбера:

$$\nabla^2 \bar{H} - \varepsilon \mu \frac{\partial^2 \bar{H}}{\partial t^2} = -\text{rot} \bar{j}_{CT}. \quad (1.3)$$

Аналогично получим уравнение для вектора  $\bar{E}$ . Берем операцию ротора от обеих частей второго уравнения Максвелла

$$\text{rot} \bar{E} = -\mu \frac{\partial \bar{H}}{\partial t},$$

т.е.

$$\text{rot rot} \bar{E} = -\mu \frac{\partial}{\partial t} \text{rot} \bar{H} = -\mu \frac{\partial}{\partial t} \left[ \varepsilon \frac{\partial \bar{E}}{\partial t} + \bar{j}_{CT} \right] = -\mu \varepsilon \frac{\partial^2 \bar{E}}{\partial t^2} - \mu \frac{\partial}{\partial t} \bar{j}_{CT},$$

откуда

$$\text{grad div} \bar{E} - \nabla^2 \bar{E} = -\mu \varepsilon \frac{\partial^2 \bar{E}}{\partial t^2} - \mu \frac{\partial}{\partial t} \bar{j}_{CT}.$$

С учетом того, что

$$\text{div} \bar{E} = \frac{\rho}{\varepsilon},$$

имеем

$$\text{grad div} \bar{E} = \text{grad} \frac{\rho}{\varepsilon} = \frac{1}{\varepsilon} \nabla \rho.$$

Уравнение Даламбера для вектора  $\bar{E}$  примет вид

$$\nabla^2 \bar{E} - \mu\epsilon \frac{\partial^2 \bar{E}}{\partial t^2} = \mu \frac{\partial \bar{j}_{CT}}{\partial t} + \frac{1}{\epsilon} \nabla \rho. \quad (1.4)$$

Уравнения Даламбера (1.3), (1.4) позволяют определить поле излучения (вектора  $\bar{E}$ ,  $\bar{H}$ ) по известному распределению в пространстве вектора плотности сторонних токов  $\bar{j}_{CT}$  и объёмной плотности зарядов  $\rho$ .

Выразим полученные уравнения через электродинамические потенциалы.

**Векторный потенциал  $\bar{A}$ .** Воспользуемся уравнением Максвелла

$$\operatorname{div} \bar{B} = 0, \text{ или } \operatorname{div}(\mu \bar{H}) = 0.$$

Введём формально некоторый вектор  $\bar{A}$  на основании тождества

$$\operatorname{div} \operatorname{rot} \bar{A} = 0, \quad (1.5)$$

тогда

$$\mu \bar{H} = \operatorname{rot} \bar{A}.$$

Векторный потенциал позволяет определить вектор напряжённости магнитного поля

$$\bar{H} = \frac{1}{\mu} \operatorname{rot} \bar{A}. \quad (1.5a)$$

С точки зрения теории поля тождество (1.5) устанавливает тот факт, что расходимость вихрей произвольного вектора  $\bar{A}$  всегда равна нулю.

Формальное обоснование этого утверждения вытекает из выражения (1.5) с использованием оператора набла:

$$\nabla \nabla \times \bar{A} = 0.$$

Это равенство является смешанным произведением трех векторов. Его геометрический смысл – объём параллелепипеда, построенного на данных векторах. Очевидно, что при двух совпадающих векторах объём равен нулю.

**Скалярный потенциал  $\varphi$ .** Воспользуемся вторым уравнением Максвелла с учетом введенного выше векторного потенциала

$$\operatorname{rot} \bar{E} = -\frac{\partial \bar{B}}{\partial t},$$

откуда

$$\operatorname{rot} \bar{E} = -\mu \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{1}{\mu} \operatorname{rot} \bar{A} \right),$$

т.е.

$$\operatorname{rot} \bar{E} = -\operatorname{rot} \frac{\partial \bar{A}}{\partial t},$$

следовательно,

$$\operatorname{rot} \left( \bar{E} + \frac{\partial \bar{A}}{\partial t} \right) = 0. \quad (1.6)$$

Введём формально некоторую функцию  $\varphi(x, y, z)$ , используя тождество  $\operatorname{rot} \operatorname{grad} \varphi = 0$ , т.е.

$$\nabla \times \nabla \varphi = 0. \quad (1.6a)$$

Модуль векторного произведения  $|\nabla \times \nabla|$  определяет площадь параллелограмма на данных векторах. При совпадающих векторах площадь равна нулю. С точки зрения теории поля это равенство утверждает, что линии градиента произвольной функции  $\varphi(x, y, z)$  не являются вихревыми.

Сравнив выражения (1.6) и (1.6a), получим

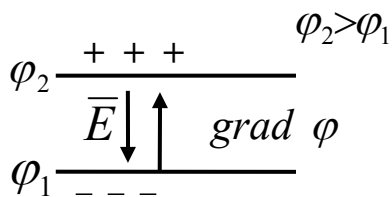


Рис. 1.1

$$\bar{E} + \frac{\partial \bar{A}}{\partial t} = -\operatorname{grad} \varphi.$$

Градиент взят со знаком минус, так как в отличие от вектора  $\bar{E}$  вектор градиента направлен всегда в сторону увеличения скалярного потенциала  $\varphi$  (рис. 1.1).

Таким образом, вектор  $\bar{E}$  можно выразить через векторный и скалярный потенциалы:

$$\bar{E} = -\frac{\partial \bar{A}}{\partial t} - \operatorname{grad} \varphi. \quad (1.7)$$

Выразим уравнение излучения через векторный и скалярный потенциалы.

Исходя из уравнения излучения

$$\operatorname{rot} \bar{H} = \varepsilon \frac{\partial \bar{E}}{\partial t} + \bar{j}_{CT},$$

заменяя векторы поля через электродинамические потенциалы (1.5а), (1.7), получаем

$$\frac{1}{\mu} \operatorname{rot} \operatorname{rot} \bar{A} = \varepsilon \frac{\partial}{\partial t} \left[ -\frac{\partial \bar{A}}{\partial t} - \operatorname{grad} \varphi \right] + \bar{j}_{CT}.$$

Выполним очевидные преобразования:

$$\operatorname{grad} \operatorname{div} \bar{A} - \nabla^2 \bar{A} = -\varepsilon \mu \frac{\partial^2 \bar{A}}{\partial t^2} - \varepsilon \mu \cdot \operatorname{grad} \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \mu \bar{j}_{CT};$$

$$\nabla^2 \bar{A} - \varepsilon \mu \frac{\partial^2 \bar{A}}{\partial t^2} - \operatorname{grad} \left[ \varepsilon \mu \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \operatorname{div} \bar{A} \right] = -\mu \bar{j}_{CT}.$$

Для упрощения выражения зададим условие

$$\varepsilon \mu \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \operatorname{div} \bar{A} = 0.$$

Оно называется условием калибровки Лоренца и соответствует формуле

$$\operatorname{div} \bar{A} = -\varepsilon \mu \frac{\partial \varphi}{\partial t}. \quad (1.8)$$

Равенство относительно векторного потенциала с учетом условия калибровки принимает следующий вид:

$$\nabla^2 \bar{A} - \varepsilon \mu \frac{\partial^2 \bar{A}}{\partial t^2} = -\mu \bar{j}_{CT}. \quad (1.9)$$

Получим уравнение для скалярного потенциала. Исходя из уравнения Максвелла  $\operatorname{div} \bar{D} = \rho$ , или  $\operatorname{div} \bar{E} = \frac{\rho}{\varepsilon}$ , с учетом (1.7) имеем

$$\operatorname{div} \left[ -\frac{\partial \bar{A}}{\partial t} - \operatorname{grad} \varphi \right] = \frac{\rho}{\varepsilon},$$

т.е.

$$\operatorname{div} \frac{\partial \bar{A}}{\partial t} + \operatorname{div} \operatorname{grad} \varphi = -\frac{\rho}{\varepsilon}.$$

Используя условие калибровки (1.8), подставляя в предыдущее уравнение и вводя оператор набла, получаем

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( -\varepsilon \mu \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right) + \nabla \nabla \varphi = -\frac{\rho}{\varepsilon}.$$

Окончательное уравнение излучения для скалярного потенциала принимает такой вид:

$$\nabla^2 \varphi - \varepsilon \mu \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = -\frac{\rho}{\varepsilon}. \quad (1.10)$$

*Замечание.* В задаче излучения наряду со скалярным и векторным потенциалами рассматривают также вектор Герца  $\bar{\Gamma}$ , удовлетворяющий равенству

$$\varphi = -\text{div} \bar{\Gamma}. \quad (1.11)$$

Через этот вектор можно выразить и векторный потенциал. Используя условие калибровки (1.8), имеем

$$\text{div} \bar{A} = -\varepsilon \mu \frac{\partial \varphi}{\partial t} = \varepsilon \mu \frac{\partial}{\partial t} \text{div} \bar{\Gamma},$$

откуда векторный потенциал

$$\bar{A} = \varepsilon \mu \frac{\partial \bar{\Gamma}}{\partial t}. \quad (1.12)$$

Проведем качественное обоснование решения уравнения Даламбера для скалярного потенциала (1.10).

Рассмотрим статический случай уравнения Даламбера. В этом частном случае скалярный потенциал во времени не изменяется, тогда уравнение принимает частный вид уравнения Пуассона:

$$\nabla^2 \varphi = -\frac{\rho}{\varepsilon}. \quad (1.13)$$

Пусть статическое поле создается статическим зарядом  $q$ , находящимся в начале координат. В соответствии с законом Кулона сила взаимодействия пробного  $q_0$  и основного  $q$  зарядов

$$\bar{F} = k \frac{qq_0}{r^2} \bar{r}_0,$$

где  $k = \frac{1}{4\pi\varepsilon}$ .

Пронормировав силу на величину пробного заряда, получим напряженность поля

$$\bar{E} = \frac{\bar{F}}{q_0} = k \frac{q}{r^2} \bar{r}_0.$$



Стационарное поле является безвихревым, поэтому  $\text{rot}\bar{E} = 0$ , следовательно, и  $\frac{\partial \bar{A}}{\partial t} = 0$ , тогда

$$\bar{E} = -\frac{\partial \bar{A}}{\partial t} - \text{grad}\varphi = -\text{grad}\varphi.$$

В сферической системе координат градиент потенциала точечного заряда зависит только от радиальной координаты, поэтому

$$\bar{E} = -\text{grad}\varphi = -\bar{r}_0 \frac{d\varphi}{dr}.$$

Решая дифференциальное уравнение

$$E dr = d\varphi,$$

подставляя выражение для напряженности поля

$$k \frac{q}{r^2} dr = d\varphi,$$

получаем

$$\varphi = k \frac{q}{r} + c.$$

Принимая во внимание граничное условие  $r \rightarrow \infty$ ,  $\varphi \rightarrow 0$ , находим  $c = 0$ , в результате чего имеем

$$\varphi = k \frac{q}{r}. \quad (1.14)$$

Если заряд не точечный, а распределен в объеме  $V$  с плотностью  $\rho(x, y, z)$ , то для элемента объема (рис. 1.2)

$$d\varphi = k \frac{dq}{r} = k \frac{\rho dV}{r},$$

а для всего объема

$$\varphi = k \int_V \frac{\rho dV}{r}. \quad (1.15)$$

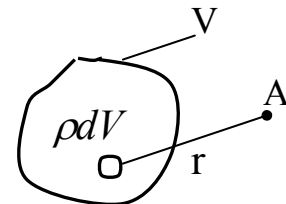


Рис. 1.2

Это выражение является решением уравнения Пуассона и соответствует статическому варианту.

Для динамического варианта в случае изменяющегося во времени точечного заряда  $q(t)$  уравнение Даламбера принимает вид

$$\nabla^2 \varphi - \varepsilon \mu \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = -\frac{\rho}{\varepsilon}.$$

Исключив начало координат, где расположен точечный заряд, получим однородное уравнение

$$\nabla^2 \varphi - \varepsilon \mu \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = 0. \quad (1.16)$$

В сферической системе координат уравнение принимает следующий вид:

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial r} - \varepsilon \mu \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = 0.$$

Введём новую переменную  $\varphi_1 = \varphi r$ , т.е.  $\varphi = \frac{\varphi_1}{r}$ , тогда первую и вторую производные, входящие в уравнение, можно записать так:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial r} = \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi_1}{\partial r} - \frac{\varphi_1}{r^2};$$

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2} = \frac{1}{r} \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial r^2} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial \varphi_1}{\partial r} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial \varphi_1}{\partial r} + \frac{2}{r^3} \varphi_1.$$

Подставив эти производные в исходное уравнение (1.16), получим одномерное волновое уравнение

$$\frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial r^2} - \varepsilon \mu \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial t^2} = 0.$$

Введя в него обозначение для фазовой скорости

$$v = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon \mu}},$$

получим

$$\frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial r^2} - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial t^2} = 0.$$

Решением этого уравнения является волновая функция

$$\varphi_1 = f_1\left(t - \frac{r}{v}\right) + f_2\left(t + \frac{r}{v}\right),$$

в которой оставляем только слагаемое, соответствующее прямой волне:

$$\varphi_1 = f_1\left(t - \frac{r}{v}\right), \text{ или } \varphi = \frac{1}{r} f_1\left(t - \frac{r}{v}\right).$$

Сравнивая со стационарным случаем

$$\varphi = k \frac{q}{r},$$

по аналогии для изменяющегося заряда можно записать

$$\varphi = k \frac{q\left(t - \frac{r}{v}\right)}{r}.$$

Обобщим этот результат для произвольного распределения зарядов по объему  $V$  с плотностью  $\rho$  (рис. 1.3):

$$\varphi = k \int_V \frac{\rho\left(t - \frac{r}{v}\right)}{r} dV, \quad (1.17)$$

где  $r = \sqrt{(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 + (z - z_1)^2}$  – текущее расстояние от точки наблюдения  $M$  до элемента объема с зарядом (точка  $P$ ).

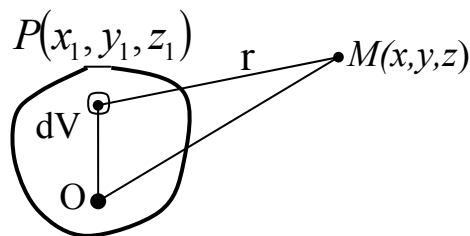


Рис. 1.3

На основании полученных результатов можно сделать следующие выводы:

1. Наличие зависящего от времени слагаемого  $-\frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2}$  в уравнении Даламбера приводит к переходу от квазистатического решения  $\varphi = k \frac{q(t)}{r}$  ( $v \rightarrow \infty$ ) к волновому.

2. Изменение потенциала запаздывает по отношению к изменению заряда  $q(t)$ , поэтому такой потенциал называют запаздывающим.

3. При определении потенциала для момента времени  $t$ , т.е.  $\varphi(t)$ , значения заряда берутся для каждого элемента объёма в более ранний момент времени  $t_1 = t - \frac{r}{v}$ . Влияние заряда на значение

потенциала происходит не мгновенно, а через время  $\Delta t = \frac{r}{v}$  – время распространения волны от элемента объёма  $dV$  до точки наблюдения.

4. Сравним уравнения для потенциалов

$$\nabla^2 \varphi - \varepsilon \mu \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = -\frac{\rho}{\varepsilon} \quad \text{и} \quad \nabla^2 \bar{A} - \varepsilon \mu \frac{\partial^2 \bar{A}}{\partial t^2} = -\mu \bar{j}_{CT},$$

можно записать решение уравнения для векторного потенциала  $\bar{A}$ :

$$\bar{A} = \frac{\mu}{4\pi v} \int \frac{\bar{j}\left(t - \frac{r}{v}\right)}{r} dV. \quad (1.18)$$

Аналогично для скалярного потенциала

$$\varphi = \frac{1}{4\pi \varepsilon v} \int \frac{\rho\left(t - \frac{r}{v}\right)}{r} dV.$$

Запишем уравнения, используемые в задачах излучения, для полей, изменяющихся по гармоническому закону.

Для монохроматического поля

$$\dot{\vec{E}} = \dot{\vec{E}}_m e^{j\omega t}$$

в полученных выражениях мгновенные значения переменных нужно заменить на комплексные амплитуды (например  $\dot{\vec{E}}_m$ ), а оператор

производной  $\frac{\partial}{\partial t} \rightarrow j\omega$ . Вследствие таких формальных замен приведенные выше выражения принимают модифицированную форму.

Векторы электромагнитного поля, выраженные через соответствующие потенциалы, следующие:

$$\begin{aligned}\bar{E} &= -\frac{\partial \bar{A}}{\partial t} - \text{grad} \varphi; & \dot{\bar{E}} &= -j\omega \dot{\bar{A}} - \text{grad} \dot{\varphi}; \\ \bar{H} &= \frac{1}{\mu} \text{rot} \bar{A}; & \dot{\bar{H}} &= \frac{1}{\mu} \text{rot} \dot{\bar{A}}.\end{aligned}\quad (1.19)$$

Взаимосвязь векторного и скалярного потенциалов (условие калибровки) такова:

$$\text{div} \bar{A} = -\varepsilon \mu \frac{\partial \varphi}{\partial t}; \quad \text{div} \dot{\bar{A}} = -j\omega \varepsilon \mu \dot{\varphi}. \quad (1.20)$$

После подстановки в соответствующее уравнение в (1.19)

$$\dot{\varphi} = -\frac{1}{j\omega \varepsilon \mu} \text{div} \dot{\bar{A}}$$

вектор  $\bar{E}$ , выраженный через векторный потенциал, будет иметь вид

$$\dot{\bar{E}} = -j\omega \dot{\bar{A}} - j \frac{1}{\omega \varepsilon \mu} \text{grad} \text{div} \dot{\bar{A}}. \quad (1.21)$$

Приведем уравнения Даламбера для потенциалов  $\bar{A}$  и  $\varphi$ :

$$\nabla^2 \bar{A} - \varepsilon \mu \frac{\partial^2 \bar{A}}{\partial t^2} = -\mu \dot{\bar{j}}_{CT}, \quad \nabla^2 \dot{\bar{A}} + \omega^2 \varepsilon \mu \dot{\bar{A}} = -\mu \dot{\bar{j}}_{CT}; \quad (1.22)$$

$$\nabla^2 \varphi - \varepsilon \mu \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = -\frac{\rho}{\varepsilon}, \quad \nabla^2 \dot{\varphi} + \omega^2 \varepsilon \mu \dot{\varphi} = -\frac{\dot{\rho}}{\varepsilon}. \quad (1.23)$$

Решения уравнений Даламбера следующие:

$$\bar{A} = \frac{\mu}{4\pi} \int_V \frac{\bar{j}_{CT} \left( t - \frac{r}{v} \right)}{r} dV, \quad \dot{\bar{A}}_m = \frac{\mu}{4\pi} \int_V \frac{\dot{\bar{j}}_{CTm} e^{-jkr}}{r} dV, \quad (1.24)$$

причем запаздывающая плотность тока в подынтегральном выражении (1.24) преобразована, т.е.

$$\dot{\bar{j}} \left( t - \frac{r}{v} \right) = \dot{\bar{j}}_m e^{j\omega \left( t - \frac{r}{v} \right)} = \dot{\bar{j}}_m e^{-jkr} e^{j\omega t},$$

где  $k = \omega/v$ .

Аналогично для скалярного потенциала

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\varepsilon_V} \int \frac{\rho\left(t - \frac{r}{v}\right)}{r} dV, \quad \dot{\varphi} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_V} \int \frac{\dot{\rho}_m e^{-jkr}}{r} dV. \quad (1.25)$$

Запишем взаимосвязь потенциалов поля и вектора Герца:

$$\bar{A} = \varepsilon\mu \frac{\partial \bar{\Gamma}}{\partial t}, \quad \dot{\bar{A}} = j\omega\varepsilon\mu \dot{\bar{\Gamma}}; \quad (1.26)$$

$$\varphi = -\text{div} \bar{\Gamma}, \quad \dot{\varphi} = -\text{div} \dot{\bar{\Gamma}}. \quad (1.26a)$$

Подставив выражение для векторного потенциала

$$\dot{\bar{A}} = j\omega\varepsilon\mu \dot{\bar{\Gamma}}$$

в соответствующее уравнение Даламбера

$$\nabla^2 \dot{\bar{A}} + \omega^2 \varepsilon\mu \dot{\bar{A}} = -\dot{j}_{CT},$$

после очевидных преобразований

$$(j\omega\varepsilon\mu) \nabla^2 \dot{\bar{\Gamma}} + \omega^2 \varepsilon\mu (j\omega\varepsilon\mu \dot{\bar{\Gamma}}) = -\dot{j}_{CT},$$

$$\nabla^2 \dot{\bar{\Gamma}} + \omega^2 \varepsilon\mu \dot{\bar{\Gamma}} = -\frac{1}{j\omega\varepsilon} \dot{j}_{CT}$$

получим

$$\nabla^2 \dot{\bar{\Gamma}} + k^2 \dot{\bar{\Gamma}} = -\frac{1}{j\omega\varepsilon} \dot{j}_{CT}, \quad (1.27)$$

где  $k^2 = \omega^2 \varepsilon\mu$ .

## 1.2. Основные принципы теории излучения

### **Принцип перестановочной двойственности уравнений Максвелла**

Для симметрии уравнений Максвелла вводят формальные магнитные токи и заряды с плотностями  $\bar{j}_M$ ,  $\bar{\rho}_M$ . Тогда эти уравнения принимают следующий вид:

$$\begin{aligned} \text{rot} \bar{H} &= \bar{j} + \varepsilon \frac{\partial \bar{E}}{\partial t}; \\ \text{rot} \bar{E} &= \left( -\bar{j}_M - \mu \frac{\partial \bar{H}}{\partial t} \right); \end{aligned} \quad (1.28)$$

$$\operatorname{div} \bar{D} = \rho;$$

$$\operatorname{div} \bar{B} = \rho_M.$$

В частности, из второго уравнения следует, что

$$\operatorname{div} \operatorname{rot} \bar{E} = -\operatorname{div} \bar{j}_M - \frac{\partial}{\partial t} \operatorname{div} (\mu \bar{H}) = 0,$$

так как  $\nabla \nabla \times \bar{E} = 0$ . Тогда

$$- \operatorname{div} \bar{j}_M - \frac{\partial}{\partial t} (\operatorname{div} \bar{B}) = -\operatorname{div} \bar{j}_M - \frac{\partial \rho_M}{\partial t},$$

откуда получаем закон сохранения магнитного заряда

$$\operatorname{div} \bar{j}_M = -\frac{\partial \rho_M}{\partial t}.$$

Сравнивая уравнения Максвелла, можно сделать вывод о том, что электрические и магнитные составляющие поля  $\bar{E}$  и  $\bar{H}$  удовлетворяют условиям перестановочной двойственности

$$\bar{E} \leftrightarrow \bar{H}, \quad \varepsilon \leftrightarrow -\mu, \quad \bar{j} \leftrightarrow -\bar{j}_M, \quad \rho \leftrightarrow -\rho_M.$$

Использование этого принципа позволяет упростить решение задачи излучения. Вначале решается задача для электрических источников. Решение задачи для магнитных источников записывается с применением принципа указанных эквивалентных замен. Граничные условия для магнитных источников формулируются также с использованием этого принципа.

### **Электромагнитное поле электрических и магнитных токов**

Задача об излучении состоит из таких независимых задач: определение полей от электрических и магнитных источников. Этим двум задачам соответствуют две системы уравнений:

$$\begin{cases} \operatorname{rot} \dot{\bar{H}}_1 = j \omega \varepsilon \dot{\bar{E}}_1 + \dot{\bar{j}}_{CT}, \\ \operatorname{rot} \dot{\bar{E}}_1 = -j \omega \mu \dot{\bar{H}}_1; \end{cases} \quad \begin{cases} \operatorname{rot} \dot{\bar{H}}_2 = j \omega \varepsilon \dot{\bar{E}}_2, \\ \operatorname{rot} \dot{\bar{E}}_2 = -j \omega \mu \dot{\bar{H}}_2 - \dot{\bar{j}}_M. \end{cases}$$

Общее поле определяется как сумма полей:

$$\dot{\bar{E}} = \dot{\bar{E}}_1 + \dot{\bar{E}}_2;$$

$$\dot{\bar{H}} = \dot{\bar{H}}_1 + \dot{\bar{H}}_2.$$

Решение задачи для электрических источников можно записать через векторный потенциал электрического поля:

$$\dot{\vec{E}}_1 = -j\omega\dot{\vec{A}} - j\frac{1}{\omega\epsilon\mu} \text{graddiv}\dot{\vec{A}}, \quad (1.29)$$

$$\dot{\vec{H}}_1 = \frac{1}{\mu} \text{rot}\dot{\vec{A}}. \quad (1.29a)$$

Аналогично решение задачи для магнитных источников с использованием векторного потенциала магнитного поля имеет вид

$$\dot{\vec{H}}_2 = -j\omega\dot{\vec{A}}_M - j\frac{1}{\omega\epsilon\mu} \text{graddiv}\dot{\vec{A}}_M, \quad (1.30)$$

$$\dot{\vec{E}}_2 = -\frac{1}{\epsilon} \text{rot}\dot{\vec{A}}_M. \quad (1.30a)$$

### Эквивалентные источники электромагнитного поля

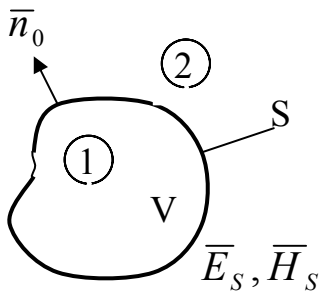


Рис. 1.4

Поле излучения можно определить: а) исходя из первичных источников  $\vec{j}_{CT}, \rho$ ; б) зная распределение поля на замкнутой поверхности, которая охватывает источники, с использованием вторичных источников поля. На рис. 1.4 показан некоторый объем  $V$ , внутри которого заключены первичные источники поля. Определим вторичные источники  $\vec{j}_S, \rho_S$  на поверхности  $S$ , отделяющей данный объем.

Запишем граничные условия для поверхности  $S$ :

1) касательная составляющая вектора  $\vec{H}$  на поверхности терпит разрыв, если по ней текут поверхностные токи

$$\vec{n} \times (\vec{H}_2 - \vec{H}_1) = \vec{j}_S,$$

$$-\vec{n} \times (\vec{E}_2 - \vec{E}_1) = \vec{j}_{MS};$$

2) нормальные составляющие векторов поля на границе раздела сред изменяются скачкообразно на величину поверхностного заряда  $\rho_S$ , т.е.

$$-\epsilon_1 E_{n1} + \epsilon_2 E_{n2} = \rho_S,$$

$$+\mu_1 H_{n1} - \mu_2 H_{n2} = -\rho_{MS}.$$

Если предположить, что поле в первой среде отсутствует ( $E_1 = H_1 = 0$ ), то



$$\begin{cases} \bar{n} \times \bar{H}_2 = \bar{j}_S, \\ -\bar{n} \times \bar{E}_2 = \bar{j}_{MS}; \end{cases} \quad \begin{cases} \varepsilon_2 E_{n2} = \rho_S, \\ \mu_2 H_{n2} = \rho_{MS}. \end{cases} \quad (1.31)$$

На поверхности  $S$  источниками поля являются вторичные источники  $\bar{j}_S$ ,  $\rho_S$ ,  $\bar{j}_{SM}$ ,  $\rho_{SM}$ . Вторичные источники определяются через нормальные и тангенциальные составляющие полей на этой плоскости.

### Элемент Гюйгенса

*Элемент Гюйгенса* – это малый элемент фронта волны. Принцип Гюйгенса основан на понятии вторичных источников поля. Каждый элемент фронта волны (элемент Гюйгенса) рассматривается как вторичный элементарный источник волны. Элемент Гюйгенса возбуждается вторичными поверхностными электрическим и магнитным токами. На рис. 1.5 показана плоская волна, где введены следующие обозначения:

- $XOY$  – плоскость фронта волны;
- $\Delta S = \Delta x \Delta y$  – элемент фронта волны (элемент Гюйгенса), причем  $\Delta x \ll \lambda$ ,  $\Delta y \ll \lambda$ .

Заметим, что элемент  $\Delta S$  излучает только в переднее полупространство ( $z > 0$ ).

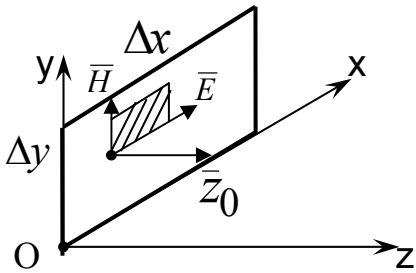


Рис. 1.5

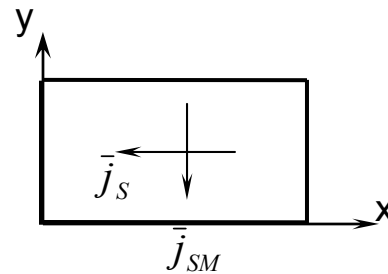


Рис. 1.6

Вторичный излучатель задается возбуждающими поверхностными токами (рис. 1.6)

$$\begin{aligned} \bar{j}_S &= \bar{z}_0 \times \dot{\bar{H}}_S = -\bar{x}_0 \dot{H}_S, \\ \bar{j}_{SM} &= \dot{\bar{E}}_S \times \bar{z}_0 = -\bar{y}_0 \dot{E}_S. \end{aligned} \quad (1.32)$$

Поскольку размеры элемента площади  $\Delta x \cdot \Delta y$  малы, то величины поверхностных токов  $\bar{j}_S$ ,  $\bar{j}_{SM}$  распределены на элементе равномерно.

Интегральные значения поверхностных токов таковы:

$$\dot{I}_S = \bar{j}_S \Delta y = \dot{H}_S \Delta y;$$

$$\dot{I}_{SM} = \bar{j}_{SM} \Delta x = \dot{E}_S \Delta x.$$

Поле излучения элемента Гюйгенса определяется как сумма полей, создаваемых электрическим и магнитным излучателями с токами  $I_S$ ,  $I_{SM}$ .

### **Лемма Лоренца и принцип взаимности**

Пусть два независимых источника, которые определяются сторонними электрическими токами с плотностью  $\dot{j}_{1cm}$ ,  $\dot{j}_{2cm}$ , создают соответствующие электромагнитные поля  $\dot{E}_1, \dot{H}_1$  и  $\dot{E}_2, \dot{H}_2$ .

Тогда для изотропной среды справедливо следующее равенство:

$$\operatorname{div} \left\{ \dot{E}_1 \times \dot{H}_2 - \left[ \dot{E}_2 \times \dot{H}_1 \right] \right\} = \dot{j}_{1cm} \dot{E}_2 - \dot{j}_{2cm} \dot{E}_1.$$

Это соотношение называется леммой Лоренца в дифференциальной форме. Уравнение может быть получено из преобразований уравнений Максвелла, описывающих оба источника электромагнитного поля.

Следствием леммы Лоренца является принцип взаимности, имеющий фундаментальное значение в электродинамике.

В безграничном однородном пространстве для непересекающихся областей  $V_1$  и  $V_2$ , в которых действуют соответствующие сторонние токи  $\dot{j}_{1cm}$ ,  $\dot{j}_{2cm}$ , справедливо соотношение взаимности

$$\int_{V_1} \dot{j}_{1cm} \dot{E}_2 dv = \int_{V_2} \dot{j}_{2cm} \dot{E}_1 dv.$$

На основании этой теоремы можно сформулировать физические следствия.

Сторонний ток с плотностью  $\dot{j}_{1cm}$  возбуждает в объеме  $V_2$  такое же поле, какое он будет возбуждать в объеме  $V_1$  при нахождении источника в области пространства  $V_2$ . Следовательно, при наличии двух антенн изменение их функционального назначения с приемной на передающую, и наоборот, не приводит к изменению электродина-

мических характеристик. При этом диаграмма направленности приемной антенны остается такой же, как и при работе ее в качестве передающей антенны.

## 2. ДИФРАКЦИЯ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО ПОЛЯ

**Дифракция** – это явление изменения структуры поля первичной волны при падении её на некоторые неоднородности. Слово *diffractus* в узком смысле означает «изломанный», что связано с огибанием волнами встречных препятствий.

На рис. 2.1 показан процесс изменения структуры первичного поля, где даны такие обозначения:

- $\dot{E}_1$  – плоская электромагнитная волна (первичное поле);
- $\dot{E}_2$  – вторичное поле как результат рассеяния телом  $V$  первичного поля;
- $\dot{E}_{вн}$  – внутреннее поле, т.е. поле, проникающее в тело.

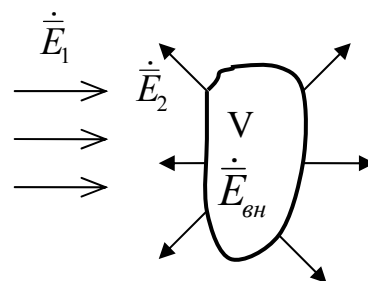


Рис. 2.1

Первичная волна, падающая на диафрагмирующий объект, частично отражается от него, а часть волны проникает внутрь. Комбинация этих трех компонент волны изменяет структуру первоначального поля.

На металлическом препятствии внутреннее поле отсутствует ( $\dot{E}_{вн} = 0$ ), а структура первичной волны изменяется за счет отраженной волны  $\dot{E}_2$ . Источниками вторичного поля являются поверхностные электрические токи, которые наведены падающей волной на металлическом препятствии.

### 2.1. Дифракция Френеля для плоской волны на отверстии

В качестве диафрагмирующего объекта рассматривается неограниченный плоский идеально проводящий экран с прямоугольным отверстием. Геометрия задачи приведена на рис. 2.2, где показаны следующие элементы:

$XOY$  – плоскость, в которой расположен идеально проводящий экран с прямоугольным отверстием;

$a \times b$  – размеры отверстия, причем  $a \gg \lambda$ ,  $b \gg \lambda$ , а начало координат находится в центре отверстия.

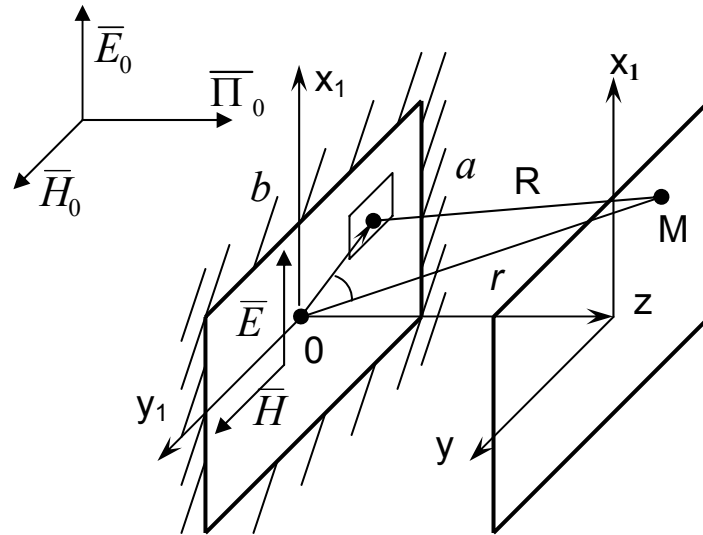


Рис. 2.2

По нормали к экрану падает плоская TEM-волна:

$$\dot{\vec{E}} = \bar{X}_0 \dot{E}_0 e^{-jkZ};$$

$$\dot{\vec{H}} = \bar{Y}_0 \dot{H}_0 e^{-jkZ},$$

где  $Z$  – направление распространения волны;

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} \text{ – волновое число;}$$

$\bar{X}_0, \bar{Y}_0$  – единичные вектора в плоскости фронта волны.

Волновое сопротивление среды для такой волны определяется по формуле

$$Z_C = \frac{\dot{E}_0}{\dot{H}_0} = \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}}.$$

Определим поле дифракции за экраном при  $z > 0$  в ближней и промежуточной зонах (дифракция Френеля). Задача решается на основании метода Гюйгенса – Кирхгофа. В этом методе принимаются следующие допущения:

а) поле в отверстии совпадает с полем падающей волны (отверстие вырезает часть фронта волны);

б) затеканием поверхностных токов на теневую сторону экрана пренебрегают;

в) каждый элемент площади в отверстии является излучающим элементом Гюйгенса;

г) общее поле дифракции определяется интегрированием по площади всего отверстия.

Определим поле дифракции в произвольной точке наблюдения  $M$  (см. рис. 2.2), которая находится на расстоянии  $r$  от центра отверстия. Координаты точки наблюдения  $M(X, Y, 0)$  задаем в дополнительной системе координат  $(X, Y, Z)$ . Рассмотрим произвольный элемент Гюйгенса  $\Delta X \times \Delta Y$ , находящийся в раскрыве отверстия, который удален от начала координат на некоторое расстояние  $\rho$ , а от точки наблюдения – на расстояние  $R$ . В соответствии с принципом Гюйгенса этот элемент является вторичным источником электромагнитной волны. Элемент Гюйгенса возбуждается эквивалентными поверхностными токами

$$\begin{aligned} I_S &= j_S \Delta y = -\dot{H}_0 \Delta y, \\ I_{SM} &= j_{SM} \Delta x = -\dot{E}_0 \Delta x. \end{aligned} \quad (2.1)$$

Поле в точке наблюдения, создаваемое этим элементом, определяется суммой полей от электрического и магнитного токов:

$$\begin{aligned} \dot{\vec{E}} &= \dot{\vec{E}}_1 + \dot{\vec{E}}_2, \\ \text{где } \dot{\vec{E}}_1 &= -j\omega \dot{\vec{A}} - j \frac{1}{\omega \varepsilon \mu} \text{grad div} \dot{\vec{A}}; & \dot{\vec{E}}_2 &= -\frac{1}{\varepsilon} \text{rot} \dot{\vec{A}}_M. \end{aligned} \quad (2.2)$$

Векторные потенциалы для электрического и магнитного токов определяются из следующих выражений:

$$\dot{\vec{A}} = \frac{\mu}{4\pi} \int_S \bar{j}_S \frac{e^{-jkR}}{R} dS; \quad \dot{\vec{A}}_M = \frac{\varepsilon}{4\pi} \int_S \bar{j}_{SM} \frac{e^{-jkR}}{R} dS. \quad (2.3)$$

С учетом условия калибровки

$$\text{div} \bar{A} = -\varepsilon \mu \frac{\partial \varphi}{\partial t}$$

вектор поля для электрического тока можно записать через потенциалы поля:

$$\bar{E} = -\frac{\partial \bar{A}}{\partial t} - \text{grad} \varphi.$$

В комплексной форме это выражение преобразуется таким образом:

$$\operatorname{div} \dot{\vec{A}} = -j\omega\varepsilon\mu\dot{\phi},$$

т.е. 
$$\dot{\phi} = j \frac{1}{\omega\varepsilon\mu} \operatorname{div} \dot{\vec{A}}.$$

Вектор поля для магнитного тока можно записать из определения векторного потенциала

$$\dot{H}_1 = \frac{1}{\mu} \operatorname{rot} \dot{\vec{A}}$$

с использованием принципа эквивалентных замен при переходе к векторному потенциалу магнитного поля.

Фазовый множитель в подынтегральной функции (2.3) связан с эффектом запаздывания в изменении векторных потенциалов относительно возбуждающих токов при прохождении волной расстояния  $R$  от элемента Гюйгенса до точки наблюдения:

$$\dot{j}\left(t - \frac{R}{v}\right) = \dot{j}_m e^{j\omega\left(t - \frac{R}{v}\right)} = \dot{j}_m e^{-jkR} e^{j\omega t}, \quad (2.4)$$

где указанное расстояние определяется по формуле (см. рис. 2.2)

$$R = \sqrt{(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 + z^2}. \quad (2.5)$$

Ограничим диапазон анализируемых расстояний, что позволит использовать следующие приближения:

$$R = z \sqrt{\left(\frac{x - x_1}{z}\right)^2 + \left(\frac{y - y_1}{z}\right)^2 + 1} \simeq z \left\{ 1 + \frac{1}{2z^2} \left[ (x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 \right] \right\};$$

$$R \simeq z + \frac{1}{2z} \left[ (x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 \right]. \quad (2.5a)$$

Тогда векторный потенциал электрической компоненты поля примет вид

$$\dot{\vec{A}} = \frac{\mu}{4\pi} \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} \dot{j}_S \frac{e^{-jkz} \cdot e^{-jk \frac{(x-x_1)^2 + (y-y_1)^2}{2z}}}{z} dy_1 dx_1. \quad (2.6)$$

Подставив выражения для векторных потенциалов в (2.2), получим вектор напряженности электрического поля в точке наблюдения

$$\dot{\vec{E}} = j\vec{x}_0 \frac{kE_0}{2\pi} \cdot \frac{e^{-jkz}}{Z} \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} e^{-jk \frac{(x-x_1)^2 + (y-y_1)^2}{2z}} dy_1 dx_1. \quad (2.7)$$

Преобразуем подынтегральное выражение, представив его в виде произведения двух экспонент. Возьмем одну экспоненту и проведем замену переменных:

$$\int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} e^{-jk \frac{(x-x_1)^2}{2z}} dx_1 = \left| \begin{array}{l} \frac{k(x-x_1)^2}{2z} = t^2; \sqrt{\frac{k}{2z}}(x-x_1) = t; \\ -\sqrt{\frac{k}{2z}} dx_1 = dt \end{array} \right|.$$

Для новой переменной интегрирования изменяем пределы интегрирования

$$t_1 = U_1 = \sqrt{\frac{k}{2z}} \left( x - \frac{a}{2} \right)$$

с учетом  $x_1 = \frac{a}{2}$ .

После замены переменных имеем

$$\int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} e^{-jk \frac{(x-x_1)^2}{2z}} dx_1 = -\sqrt{\frac{2z}{k}} \int_{U_2}^{U_1} e^{-jt^2} dt,$$

где

$$U_1 = \sqrt{\frac{k}{2z}} \left( x - \frac{a}{2} \right), \quad U_2 = \sqrt{\frac{k}{2z}} \left( x + \frac{a}{2} \right).$$

Интеграл для второй экспоненты преобразуется аналогично. В итоге исходное выражение (2.7) примет вид

$$\dot{\vec{E}} = j\vec{x}_0 \frac{k}{2\pi} \cdot \frac{E_0 e^{-jkz}}{Z} \cdot \sqrt{\frac{2z}{k}} \cdot \sqrt{\frac{2z}{k}} \int_{U_1}^{U_2} e^{-jt^2} dt \int_{\mathcal{A}_1}^{\mathcal{A}_2} e^{-jt^2} dt.$$

Сократим это выражение:

$$\dot{\vec{E}} = j\dot{A}_0 \frac{1}{\pi} \int_{U_1}^{U_2} e^{-jt^2} dt \int_{\mathcal{A}_1}^{\mathcal{A}_2} e^{-jt^2} dt. \quad (2.8)$$

Здесь введены обозначение для комплексной амплитуды волны неограниченного пространства

$$\dot{A}_0 = E_0 e^{-jkz},$$

а также пределы интегрирования

$$U_1 = \sqrt{\frac{k}{2z}} \left( x - \frac{a}{2} \right), \quad U_2 = \sqrt{\frac{k}{2z}} \left( x + \frac{a}{2} \right), \quad (2.9)$$

$$\mathcal{G}_1 = \sqrt{\frac{k}{2z}} \left( y - \frac{b}{2} \right), \quad \mathcal{G}_2 = \sqrt{\frac{k}{2z}} \left( y + \frac{b}{2} \right). \quad (2.9a)$$

Запишем интегральную функцию:

$$F_1(u) = \int_0^u e^{-jt^2} dt = \sqrt{\frac{\pi}{2}} [C(u) - jS(u)] = \sqrt{\frac{\pi}{2}} F(u). \quad (2.10)$$

Эта функция выражается через интегралы Френеля

$$C(u) = \sqrt{\frac{2}{\pi_0}} \int_0^u \cos t^2 dt, \quad S(u) = \sqrt{\frac{2}{\pi_0}} \int_0^u \sin t^2 dt. \quad (2.11)$$

Уравнение поля дифракции с использованием функций Френеля окончательно примет вид:

$$\dot{E} = \frac{1}{2} j \dot{A}_0 [F(U_2) - F(U_1)] \cdot [F(\mathcal{G}_2) - F(\mathcal{G}_1)]. \quad (2.12)$$

Интегралы Френеля при замене переменных имеют также и другую форму представления:

$$C(u) = \sqrt{\frac{2}{\pi_0}} \int_0^u \cos(t^2) dt = \int_0^u \cos(t^2) d\left( t \sqrt{\frac{2}{\pi}} \right).$$

После ввода новой переменной

$$t \sqrt{\frac{2}{\pi}} = x,$$

имеем

$$t^2 = \frac{\pi}{2} x^2.$$

Тогда изменим верхний предел интегрирования  $t = u$ , т.е.  $x = u \sqrt{\frac{2}{\pi}}$ ,

а интеграл Френеля примет следующий вид:



$$C(u) = \int_0^{u\sqrt{\frac{2}{\pi}}} \cos \frac{\pi x^2}{2} dx = C_1\left(u\sqrt{\frac{2}{\pi}}\right); \quad C_1(y) = \int_0^y \cos \frac{\pi x^2}{2} dx. \quad (2.13)$$

Проанализируем полученное поле дифракции. На комплексной плоскости интегралы Френеля изображены в виде спирали Корню (рис. 2.3). На этом графике использована параметрическая форма представления кривых, где значения аргумента указываются непосредственно на кривой, а значения функций – на осях координат. Особенности функций заключаются в следующем: функции  $C(-u) = -C(u)$ ,  $S(-u) = -S(u)$  являются нечетными, а предельные значения функций

$$C(\infty) = S(\infty) = 0,5, \\ C(0) = S(0) = 0.$$

Характер поля определяется функцией

$$F(u) = C(u) - jS(u) = C_1\left(u\sqrt{\frac{2}{\pi}}\right) - jS_1\left(u\sqrt{\frac{2}{\pi}}\right). \quad (2.14)$$

Модуль этой функции на комплексной плоскости соответствует модулю вектора, проведенного из начала координат в заданную точку на спирали (см. рис. 2.3). При изменении знака аргумента вектор, отображающий функцию, проводится в симметричную точку на другой ветви спирали. Значение поля дифракции вдоль одной из пространственных координат, например  $X$ , определяется разностью функций  $F(u)$  положительного и отрицательного аргументов:

$$|F(U_2) - F(U_1)|.$$

На комплексной плоскости эта разность соответствует разности двух векторов, проведенных в соответствующие точки двух веток спирали.

Поле в центре отверстия  $x = y = 0$  соответствует следующим аргументам функции:

$$U_{1,2} = \pm \frac{a}{2} \sqrt{\frac{k}{2z}} = \pm \frac{a}{2} \sqrt{\frac{2\pi}{\lambda 2z}} = \pm \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{a}{\sqrt{2\lambda z}};$$

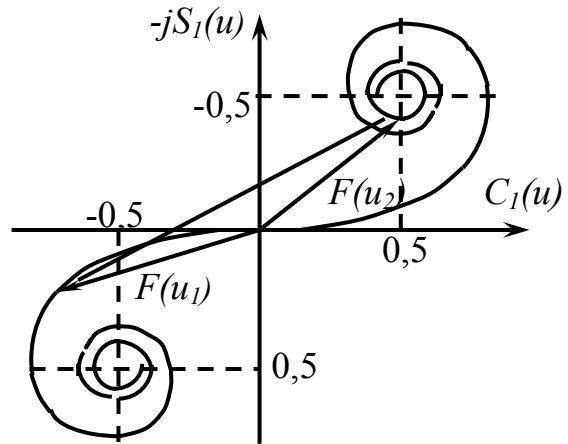


Рис. 2.3

$$\vartheta_{1,2} = \pm \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{b}{\sqrt{2\lambda z}}.$$

Напряженность поля зависит от относительных размеров отверстия. При больших размерах отверстия, т.е.

$$a \gg \sqrt{\lambda z}, \quad b \gg \sqrt{\lambda z},$$

функции приближаются к предельным значениям, при которых отображающие вектора попадают в фокусы спирали.

Тогда

$$F(u) = \frac{1-j}{2}, \quad F(U_2) - F(U_1) = \frac{1-j}{2} - \left( \frac{-1+j}{2} \right) = 1-j,$$

а напряженность поля

$$\dot{E} = j \frac{A_0}{2} (1-j)^2,$$

т.е.  $E = |\dot{E}| = A_0$  совпадает с полем открытой трассы.

С точки зрения принципа Гюйгенса спираль Корню имеет очевидное геометрическое обоснование. Эта кривая представляет собой предельный случай геометрической суммы комплексных амплитуд элементарных излучателей Гюйгенса в точке приема (рис. 2.4):

$$\dot{E} = \sum_i B \exp(-jkr_i).$$

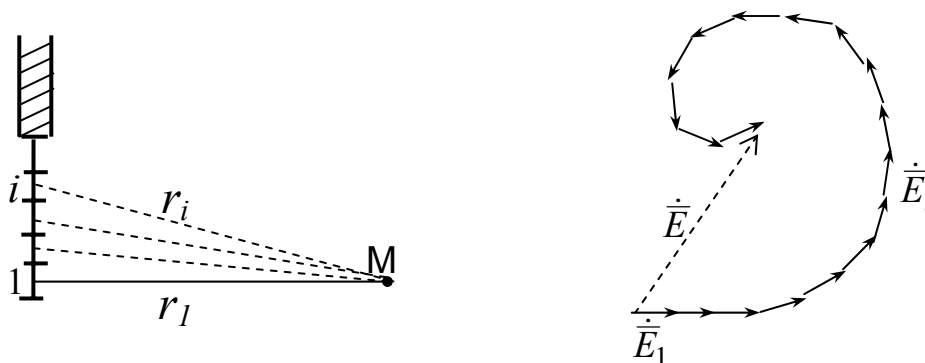


Рис. 2.4

Чем дальше расположен элемент Гюйгенса от центра отверстия, тем больший пространственный набег фазы имеет вектор напряженности поля в точке приема, что определяет поворот соответствующего элементарного вектора.

Рассмотрим частные случаи модифицированного диафрагмирующего объекта.

### Горизонтальная бесконечная щель

Этот вариант объекта получаем при неограниченном размере по продольной координате отверстия (рис. 2.5). Тогда для предельного случая по координате  $Y$  имеем

$$b \rightarrow \infty, \quad \mathcal{G}_{1,2} \rightarrow \infty, \quad F(\mathcal{G}_2) - F(\mathcal{G}_1) = 1 - j,$$

$$\dot{E} = j \frac{\dot{A}_0}{2} (1 - j) [F(U_2) - F(U_1)],$$

$$\dot{E} = \frac{\dot{A}_0}{2} (1 + j) [F(U_2) - F(U_1)]. \quad (2.15)$$

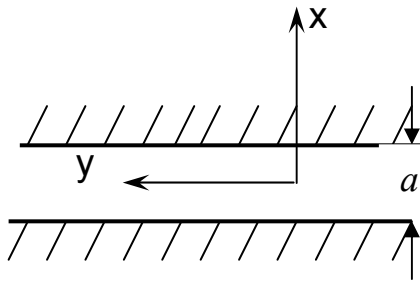


Рис. 2.5

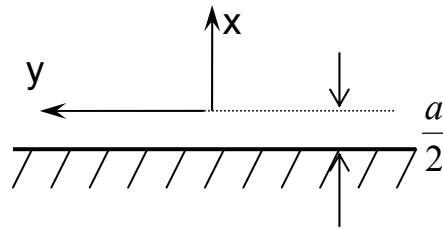


Рис. 2.6

### Бесконечная полуплоскость

Этот вариант соответствует дифракции на крае экрана.

Устраняя пространственное ограничение вдоль положительного направления оси  $X$ , переходим к данному варианту объекта (рис. 2.6).

Тогда для предельного случая переменная  $U_2 = \sqrt{\frac{k}{2z}} \left( x + \frac{a}{2} \right)$  стремится к бесконечности, а функция имеет вид

$$F(U_2) = \frac{1 - j}{2}.$$

Напряженность поля при дифракции на крае экрана будет

$$\dot{E} = \dot{A}_0 \frac{1 + j}{2} \left[ \frac{1 - j}{2} - F(U_1) \right] = \dot{A}_0 \frac{(1 + j)(1 - j)}{2} \left[ \frac{1}{2} - \frac{F(U_1)}{1 - j} \right],$$

откуда

$$\dot{E} = \dot{A}_0 \left[ 0.5 - \frac{1 + j}{2} F(U_1) \right],$$

т.е.

$$\dot{E} = \dot{A} \left[ 0.5 - \sqrt{\frac{j}{2}} F(U_1) \right],$$

где  $U_1 = \sqrt{\frac{k}{2z}} \left( x - \frac{a}{2} \right) = \sqrt{\frac{\pi}{\lambda z}} \left( x - \frac{a}{2} \right)$ .

Здесь выполнена очевидная замена сомножителя:

$$\frac{1+j}{2} = \sqrt{\frac{j}{2}}.$$

Действительно,

$$\sqrt{\frac{j}{2}} = \sqrt{\frac{e^{j\pi/2}}{2}} = \frac{e^{j\pi/4}}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left( \frac{\sqrt{2}}{2} + j \frac{\sqrt{2}}{2} \right) = \frac{1+j}{2}.$$

Амплитудное значение поля (модуль)

$$E = A_0 \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \left| \frac{1-j}{2} - F(U_1) \right|. \quad (2.16)$$

Здесь модуль разности двух комплексных величин соответствует разности двух векторов, изображенных на рис. 2.7.

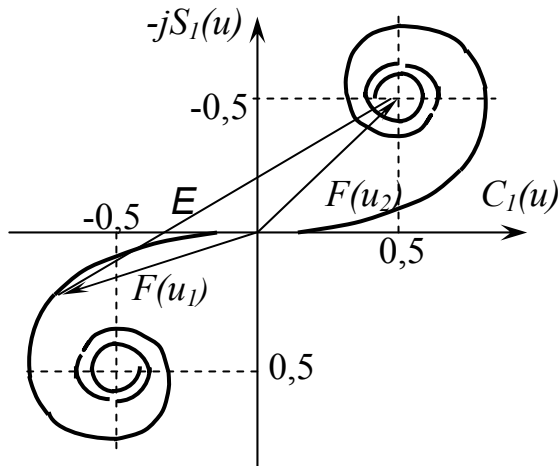


Рис. 2.7

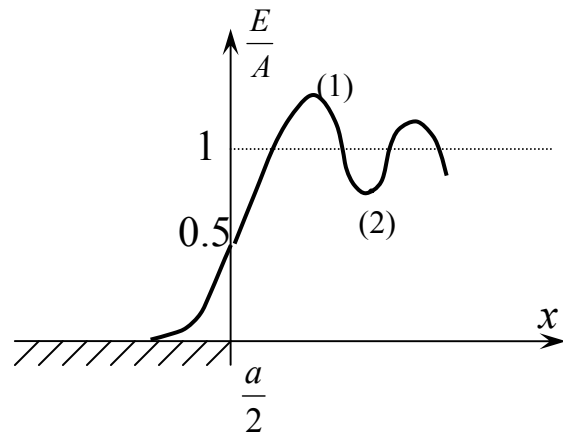


Рис. 2.8

Изменение напряженности поля на крае экрана показано на рис. 2.8. Следует отметить такие особенности поля:

а) непосредственно на крае экрана  $x = \frac{a}{2}$ ,  $U_1 = 0$ ,  $F(U_1) = 0$ ,

поэтому

$$E = A_0 \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \left| \frac{1-j}{2} \right| = \frac{A_0}{2},$$

т.е. напряженность поля равна половине напряженности поля открытой трассы;

б) выше края экрана поле имеет колебательный характер, достигая наибольшей величины дифракционного усиления  $E_1 = 1,17 A_0$  в точке (1), при этом текущий вектор, отображающий  $F(U_1)$ , смещается вдоль спирали (см. рис. 2.7);

в) в области тени  $E$  спадает по закону экспоненты.

Физическую трактовку изменения поля дифракции дает понятие *зоны Френеля*.

Разобьём плоскость фронта волны  $S$  на кольцевые области так, чтобы расстояния от краев зон до точки наблюдения  $M$  отличались на  $\lambda/2$  (рис. 2.9):

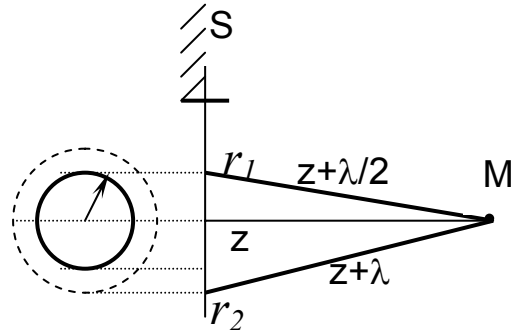


Рис. 2.9

$$\begin{aligned} r_1 &= \sqrt{\left(z + \frac{\lambda}{2}\right)^2 - z^2} = z \sqrt{\left(1 + \frac{\lambda}{2z}\right)^2 - 1} = \\ &= z \sqrt{\left(\frac{\lambda}{z} + \left(\frac{\lambda}{2z}\right)^2\right)} \approx z \sqrt{\frac{\lambda}{z}} = \sqrt{\lambda z}. \end{aligned}$$

Соотношение получено с учетом малого параметра  $\lambda/z \ll 1$ .

Тогда  $r_2 = \sqrt{(z + \lambda)^2 - z^2} \approx \sqrt{2\lambda z}$ , а радиус  $n$ -й зоны Френеля

$$r_n = \sqrt{n\lambda z}. \quad (2.17)$$

*Зона Френеля* – это кольцевая область ( $n > 1$ ) в плоскости фронта волны, для которой разность расстояний от точки наблюдения ( $M$ ) до краев зоны составляет половину длины волны ( $\lambda/2$ ).

## 2.2. Дифракция от точечного источника излучения

В этом варианте дифракции при точечном источнике и небольшом удалении от объекта фронт волны в плоскости раскрыва отверстия является сферическим. Поэтому вторичные элементарные

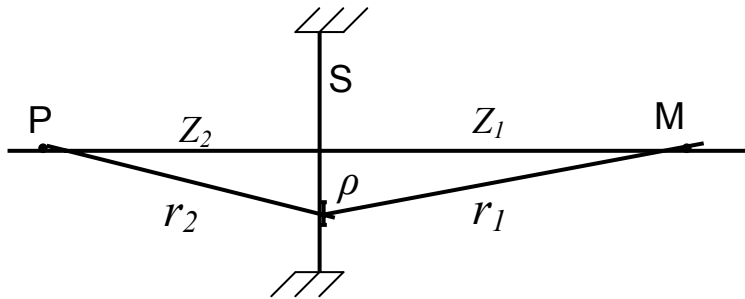


Рис. 2.10

излучатели в отверстии имеют различные фазы, так как удалены от первичного излучателя на разные расстояния. Геометрия задачи приведена на рис. 2.10, где введены следующие обозначения:

- $S$  – плоскость экрана;
- $P$  – первичный точечный источник излучения;
- $M$  – точка наблюдения;
- $\rho$  – расстояние вторичного элементарного излучателя от центра отверстия,

$$\rho = \sqrt{x_1^2 + y_1^2}.$$

Расстояние между первичным и вторичным элементарными излучателями определим с учетом приближения по малому параметру:

$$r_2 = \sqrt{\rho^2 + z_2^2} \approx z_2 \cdot \left( 1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{\rho^2}{z_2^2} \right).$$

Поскольку  $\left( \frac{\rho}{z_2} \right)^2 \ll 1$ , то  $r_2 \cong z_2 + \frac{1}{2} \cdot \frac{\rho^2}{z_2}$ .

При анализе поля дифракции исходим из выражения напряженности поля в точке наблюдения  $M$  для бесконечно удаленного источника

$$\dot{E} = j \frac{kE_0}{2\pi} \cdot \frac{e^{-jkz}}{z} \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} e^{-jk \frac{(x-x_1)^2 + (y-y_1)^2}{2z}} dy_1 dx_1.$$

Для близкого источника электромагнитная волна в плоскости отверстия не является плоской, т. е. элементарные вторичные излучатели не синфазны. Поэтому в предыдущем интеграле следует учесть, что  $\dot{E}_0 = A_0 e^{-jkr_2}$ , т. е. подынтегральное выражение нужно домножить на экспоненту

$$e^{-jkr_2} \simeq e^{-jk \left( z_2 + \frac{1}{2} \frac{\rho^2}{z^2} \right)}$$

Тогда поле в плоскости наблюдения примет вид

$$\dot{E} = j \frac{kA}{2\pi} \cdot \frac{e^{-jk(z_1+z_2)}}{z} \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} e^{-jk \left[ \frac{(x-x_1)^2 + (y-y_1)^2}{2z_1} + \frac{\rho^2}{2z_2} \right]} dy_1 dx_1,$$

а в точке наблюдения  $M(0,0,Z)$ , т. е. при  $x = y = 0$ , будет

$$\dot{E} = j \frac{kA}{2\pi} \cdot \frac{e^{-jkz}}{z} \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} e^{-jk \left[ \frac{x_1^2 + y_1^2}{2z_1} + \frac{x_1^2 + y_1^2}{2z_2} \right]} dy_1 dx_1. \quad (2.18)$$

Преобразуем выражение в показателе экспоненты:

$$\frac{x_1^2 + y_1^2}{2z_1} + \frac{x_1^2 + y_1^2}{2z_2} = (x_1^2 + y_1^2) \frac{z_1 + z_2}{2z_1 z_2}.$$

Обозначим

$$\tilde{z} = \frac{z_1 z_2}{z_1 + z_2},$$

тогда

$$\dot{E} = j \frac{kA}{2\pi} \cdot \frac{e^{-jkz}}{z} \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} e^{-jk \left[ \frac{x_1^2 + y_1^2}{2\tilde{z}} \right]} dy_1 dx_1. \quad (2.19)$$

Аналогично предыдущему случаю удаленного источника для точки наблюдения в центре отверстия имеем

$$\dot{E} = jA_0 \frac{1}{2} [F(U_2) - F(U_1)] [F(\mathcal{G}_2) - F(\mathcal{G}_1)], \quad (2.20)$$

где  $U_{1,2} = \pm \frac{a}{2} \sqrt{\frac{k}{2z}} = \pm \frac{a}{2} \sqrt{\frac{z}{\lambda z_1 z_2}} \sqrt{\pi}, \quad z = z_1 + z_2,$

$$F(u) = C(u) - jS(u), \quad (2.21)$$

$$C(u) = C_1\left(u\sqrt{\frac{2}{\pi}}\right) = C_1(\omega). \quad (2.22)$$

Аргумент функций Френеля

$$\omega = u\sqrt{\frac{2}{\pi}} = \pm \frac{a}{2} \sqrt{\frac{z}{\lambda z_1 z_2}} \sqrt{\pi} \sqrt{\frac{2}{\pi}} = \pm \frac{a}{2} \sqrt{\frac{2z}{\lambda z_1 z_2}}. \quad (2.23)$$

Амплитудное значение поля дифракции на крае экрана для точечного источника определяется типовым выражением

$$E = A_0 \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \left| \frac{1-j}{2} - F(U_1) \right|$$

при соответствующем значении аргумента.

Определим радиусы зон Френеля для близкого источника. Запишем радиальные расстояния с учетом приближения по малому параметру:

$$\left( \frac{\rho}{z_{1,2}} \right)^2 \ll 1,$$

т.е.

$$r_1 = \sqrt{z_1^2 + \rho^2} \approx -z_1 + \frac{1}{2z_1} \rho^2, \quad r_2 = \sqrt{z_2^2 + \rho^2} \approx -z_2 + \frac{1}{2z_2} \rho^2.$$

Условие границы зоны

$$(r_1 + r_2) - (z_1 + z_2) = n \frac{\lambda}{2} \quad (2.24)$$

фактически определяет условие эллипса. Сумма расстояний  $(r_1 + r_2)$  от фиксированных точек  $(P, M)$  при заданной длине трассы  $(z_1 + z_2)$  есть величина постоянная. Подставляя в (2.24) радиальные расстояния, имеем



$$\rho^2 \left( \frac{1}{2z_1} + \frac{1}{2z_2} \right) = n \frac{\lambda}{2},$$

т.е.

$$\rho = R_n = n \frac{\lambda}{2} \cdot \frac{2z_1 z_2}{z_1 + z_2},$$

откуда радиус  $n$ -й зоны Френеля удаленного источника

$$R_n = \sqrt{n\lambda \frac{z_1 z_2}{z_1 + z_2}}. \quad (2.25)$$

Тогда аргумент функций Френеля удобно выразить через радиус зоны:

$$\omega = \pm \frac{a}{2} \sqrt{\frac{2z}{\lambda z_1 z_2}} = \pm \frac{a}{2} \sqrt{2} \frac{1}{\sqrt{\lambda \frac{z_1 z_2}{z}}} = \pm \frac{a}{\sqrt{2}} \frac{1}{R_1}. \quad (2.26)$$

Определим границы области, которая оказывает существенное влияние на распространение радиоволн. Геометрия задачи приведена на рис. 2.11, где введены следующие обозначения:

- $P, M$  – точки излучения и приема;
- $O$  – начало координат, соответствующее середине трассы;
- $\xi$  – текущая координата положения плоскости экрана;
- $z_1, z_2$  – расстояния до экрана от точки приема и точки излучения соответственно;
- $l$  – длина трассы, причем

$$z_2 = \frac{l}{2} + \xi, \quad z_1 = \frac{l}{2} - \xi, \quad z = z_1 + z_2 = l.$$

Если размер отверстия удовлетворяет условию

$$\frac{a}{R_1} = \frac{a}{\sqrt{\lambda \bar{z}}} = C > 1,$$

то поле в точке  $M$  практически совпадает с полем свободной трассы ( $E \approx A$ ) при  $a = 2\eta$ , откуда  $2\eta = C \sqrt{\lambda \bar{z}}$ .

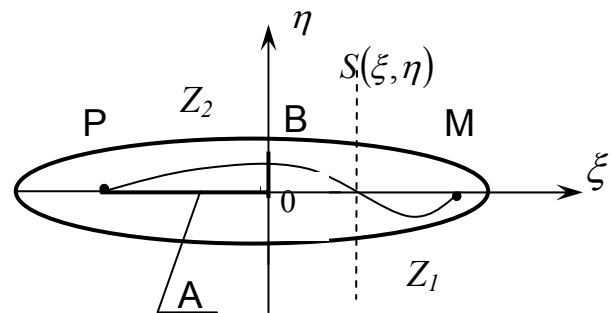


Рис. 2.11

Преобразуем выражение, учитывая, что

$$\tilde{z} = \frac{z_1 z_2}{z_1 + z_2}, \quad z_1 + z_2 = l,$$

следовательно,

$$2\eta = C \sqrt{\lambda \frac{z_1 z_2}{z_1 + z_2}} = C \sqrt{\lambda \frac{\left(\frac{l^4}{4} - \xi^2\right)}{l}}, \quad \frac{4\eta^2}{C^2} = \frac{\lambda}{l} \left(\frac{l^2}{4} - \xi^2\right),$$

$$\frac{4\eta^2}{C^2} + \frac{\lambda}{l} \xi^2 = \frac{\lambda l}{4}, \quad \frac{4\eta^2}{C^2 \frac{\lambda l}{4}} + \frac{\xi^2}{\frac{l}{\lambda} \cdot \frac{\lambda l}{4}} = 1.$$

Введем обозначения

$$A = \frac{l}{2}, \quad B = \frac{C}{4} \sqrt{\lambda l},$$

тогда

$$\frac{\xi^2}{A^2} + \frac{\eta^2}{B^2} = 1. \quad (2.27)$$

Следовательно, в выбранной системе координат  $(\xi, \eta)$  полученное уравнение представляет собой каноническое выражение эллипса.

Таким образом, область, существенная при распространении радиоволн, в плоскости представляет собой эллипс, а в пространстве – эллипсоид вращения. Малая полуось эллипса определяется радиусом первой зоны Френеля. При радиолокационном сканировании земной поверхности эта область определяет размер радиопятна. При уменьшении длины волны эллипс вырождается в прямую, что соответствует геометрической оптике.

## Библиографический список

Барсуков С.Н. Введение в теорию электромагнитного поля. Математические основы теории: учеб. пособие / С.Н. Барсуков. – Х.: Нац. аэрокосм. ун-т «Харьк. авиац. ин-т», 2006. – 39 с.

Вольман В.И. Техническая электродинамика / В.И. Вольман, Ю.В. Пименов. – М.: Связь, 1971. – 487 с.

Гольдштейн Л.Д. Электромагнитные поля и волны / Л.Д. Гольдштейн, Н.В. Зернов. – М.: Сов. радио, 1971. – 664 с.

Никольский В.В. Электродинамика и распространение радиоволн / В.В. Никольский. – М.: Наука, 1973. – 607 с.

## Оглавление

1. Излучение электромагнитных волн.....	3
1.1. Общая задача излучения. Электродинамические потенциалы.....	3
1.2. Основные принципы теории излучения.....	14
2. Дифракция электромагнитных волн.....	19
2.1. Дифракция Френеля для плоской волны на отверстии...	19
2.2. Дифракция от точечного источника излучения.....	30
Библиографический список.....	35

Барсуков Сергей Николаевич

ТЕОРИЯ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО ПОЛЯ.  
ИЗЛУЧЕНИЕ И ДИФРАКЦИЯ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ВОЛН

Редактор А.Н. Емленинова

Св. план, 2009

Подписано в печать 02.07.2009

Формат 60x84 1/16. Бум. офс. № 2. Офс. печ.

Усл. печ. л. 2. Уч.-изд. л. 2,31. Т. 100 экз. Заказ 245. Цена свободная

---

Национальный аэрокосмический университет им. Н.Е. Жуковского

«Харьковский авиационный институт»

61070, Харьков-70, ул. Чкалова, 17

<http://www.khai.edu>

Издательский центр «ХАИ»

61070, Харьков-70, ул. Чкалова, 17

[izdat@khai.edu](mailto:izdat@khai.edu)