

С.Н. Барсуков

ОСНОВЫ ТЕОРИИ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ЦЕПЕЙ И  
МИКРОЭЛЕКТРОНИКА

Часть 1  
ОСНОВЫ ТЕОРИИ ЦЕПЕЙ

Конспект лекций

2007

# 1. Основы теории цепей

## 1.1. Основные понятия и определения электроники

Основная задача электроники заключается в формировании, обработке и передачи информации.

Материальным носителем информации выступает электрический сигнал. Этот сигнал формируется потоками электронов, которые обрабатываются элементами электронной схемы. Интегральными характеристиками такого электронного потока являются: электрический ток и напряжение.

Электрический ток – это упорядоченное направленное движение электрических зарядов (электронов).

Направление электрического тока определяется направлением движения условных положительных зарядов (электроны перемещаются во встречном направлении) (рис. 1).

Ток направлен от высокого потенциала к более низкому (рис. 2).

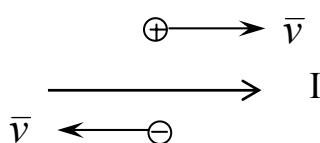


Рис. 1

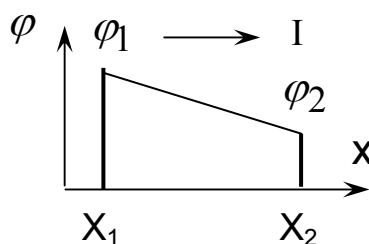


Рис. 2

Количественно ток измеряется силой тока. Сила тока  $I$  – это величина, равная количеству электричества  $\Delta q$ , которое переносится за единицу времени  $\Delta t$  через поперечное сечение проводника

$$I = \frac{\Delta q}{\Delta t}.$$

Единицей измерения тока является Ампер  $[I] = A$ , или производные от него более мелкие единицы измерения: миллиампер  $1\text{mA} = 10^{-3}\text{A}$ , наноампер  $1\text{nA} = 10^{-9}\text{A}$ , микроампер  $1\text{mA} = 10^{-6}\text{A}$ .

Напряжение (падение напряжения) между двумя точками схемы – это энергия, которая высвобождается при движении единичного положительного заряда от точки с высоким потенциалом к точке с более низким потенциалом.

Количественно падение напряжения определяется разностью потенциалов между соответствующими точками схемы

$$U = \varphi_1 - \varphi_2.$$

Единицей измерения напряжения является Вольт  $[U] = V$  или милливольт  $1\text{mV} = 10^{-3}\text{V}$ .

Поддержание электрического тока обеспечивается за счет активных элементов (источников энергии) – сторонних источников (аккумуляторы, гальванические элементы и т.д.).

Мощность, потребляемая элементом схемы, определяется работой электрического тока, совершаемой за единицу времени:

$$P = \frac{\Delta A}{\Delta t} = U \cdot I$$

(скорость совершения работы, быстрота выделения энергии).

Мощность измеряется в ваттах – Вт, или милливаттах  $1\text{ мВт} = 10^{-3}\text{ Вт}$ .

### Напряжение, ток и мощность при гармоническом сигнале

При гармоническом сигнале ток и напряжение изменяются во времени по закону синуса или косинуса:

$$i(t) = I \cos(\omega t), \quad u(t) = U \cos(\omega t),$$

где  $\omega = 2\pi f = \frac{2\pi}{T}$  – циклическая частота,

$T$  – период сигнала.

Мощность, выделяющаяся на сопротивлении  $R$ , также зависит от времени

$$p(t) = u(t) \cdot i(t) = U \cos(\omega t) \cdot I \cos(\omega t) = \frac{UI}{2} [1 + \cos(2\omega t)]$$

и изменяется с удвоенной частотой  $2\omega$  (рис. 3).

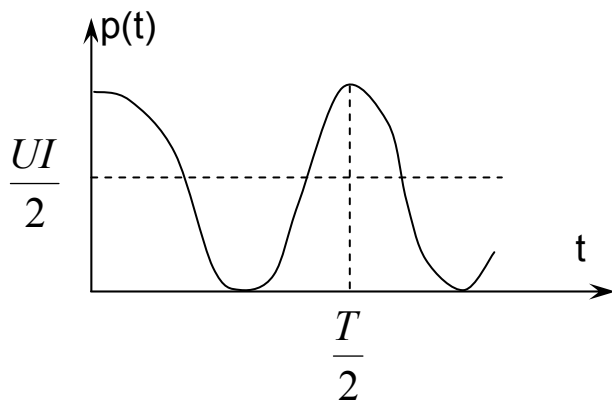


Рис. 3

Для оценки выделяемой мощности мгновенную мощность усредняют за период и используют понятие средней мощности

$$P = \frac{1}{T} \int_0^T p(t) dt = \frac{UI}{2} = \frac{U^2}{2R} = \frac{I^2}{2} R$$

Гармоническая составляющая мгновенной мощности при усреднении обращается в нуль

$$\int_0^T \cos(2\omega t) dt = \frac{1}{2\omega} \sin\left(2 \frac{2\pi}{T} T\right) - 0 = 0.$$

При измерениях оперируют с понятием действующего (эффективного, среднеквадратичного) значения гармонического напряжения или тока.

Пусть на сопротивлении  $R$  действует гармоническое напряжение  $u(t)$ , в результате которого выделяется средняя мощность  $P$ .

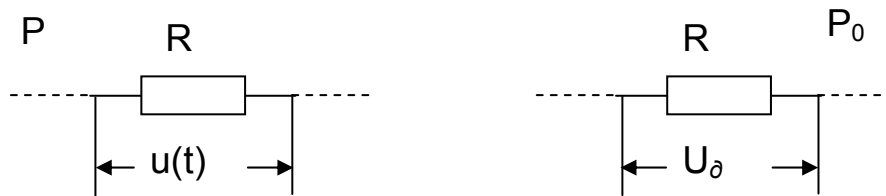


Рис. 4

Определим такое эквивалентное постоянное напряжение  $U_{\delta}$ , под действием которого на сопротивлении  $R$  выделится такая же мощность, как и под действием переменного напряжения (рис. 4).

$$P = P_0, \quad U_{\delta} = ?.$$

Средняя мощность

$$P = \frac{1}{T} \int_0^T \frac{u^2(t)}{R} dt = \frac{U^2}{2R},$$

эквивалентная мощность

$$P_0 = \frac{U_{\delta}^2}{R},$$

приравнивая мощности, имеем

$$P = P_0, \quad \text{т.е.} \quad \frac{U^2}{2R} = \frac{U_{\delta}^2}{R}, \quad \text{откуда} \quad U_{\delta}^2 = \frac{U^2}{2}, \quad \text{или} \quad U_{\delta} = \frac{U}{\sqrt{2}}.$$

Следовательно, действующее или эффективное значение гармонического напряжения – это такое эквивалентное постоянное напряжение, под действием которого на данном сопротивлении выделяется такая же мощность, что и при действии гармонического напряжения.

1. Для гармонического напряжения значение эффективного напряжения в  $\sqrt{2}$  раз меньше его амплитудного значения.

2. Действующее значение напряжения имеет смысл также средне-квадратичного напряжения:

$$P = \frac{1}{T} \int_0^T \frac{u^2(t)}{R} dt, \quad P_0 = \frac{U_{\delta}^2}{R}, \quad P = P_0, \quad \text{откуда}$$

$$U_{\delta} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T u^2(t) dt}.$$

3. Искажение формы гармонического напряжения приводит к изменению коэффициента пересчета  $\sqrt{2}$  относительно амплитудного значения напряжения.

## 1.2. Электронная схема и ее дискретные пассивные элементы

Электронная схема представляет собой совокупность взаимно соединенных дискретных и интегральных элементов. Реальная схема состоит из физических элементов: конденсаторов, индуктивностей, резисторов, диодов, транзисторов, интегральных микросхем. Для количественного (математического) анализа реальной схемы используют ее идеализированную модель. В такой схеме реальные элементы заменяются совокупностью идеализированных элементов.

Дискретные элементы подразделяются на линейные и нелинейные. Линейные элементы: резисторы, конденсаторы, индуктивности, подчиняются закону Ома. Зависимость тока от напряжения описывается линейной функцией. Нелинейные элементы: диоды, транзисторы имеют нелинейные вольт-амперные характеристики.

Пассивные элементы с энергетической точки зрения отличаются по способу преобразования энергии (реакции): диссипативный элемент (активное сопротивление), реактивные элементы (емкости, индуктивности). Активное сопротивление необратимо рассеивает электромагнитную энергию (активно преобразует электромагнитную энергию в тепловую). В реактивных элементах (реактивная реакция) энергия электрического и магнитного поля накапливается в этих элементах, а затем возвращается в цепь.

*Сопротивление* – это идеализированный пассивный линейный элемент, являющийся безинерционным преобразователем тока в напряжение (рис. 5)

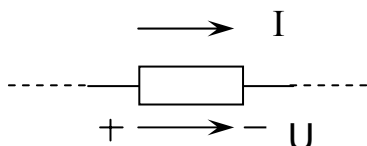


Рис. 5

$$U = IR, \quad \text{или} \quad u(t) = Ri(t).$$

*Особенности элемента.*

- 1) Ток, протекающий через элемент, направлен от высокого потенциала к низкому.
- 2) В результате протекания тока наблюдается уменьшение потенциала (падение напряжения). Величина падения напряжения является положительным при направлении его от высокого потенциала к низкому.

3) Параметром элемента является сопротивление

$$R = \rho \frac{l}{S} = \frac{1}{\sigma} \cdot \frac{l}{S}.$$

Этот параметр определяет крутизну изменения тока при изменении напряжения (рис.6):

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{I}{U} = \frac{1}{R}.$$

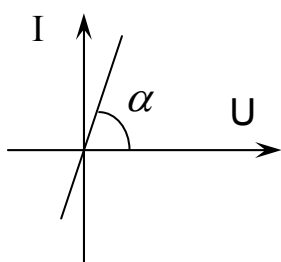


Рис.6

4) Изменение тока и напряжения на элементе происходят без запаздывания (элемент является безинерционным).

Этот элемент используется в качестве нагрузки активных устройств, в схемах фильтрации, в качестве дополнительного времязадающего элемента (задание постоянной времени), для перераспределения уровня потенциала в схеме и т.д.

*Индуктивность* – это идеализированный пассивный линейный элемент, напряжение на котором пропорционально скорости изменения тока, протекающего через него:

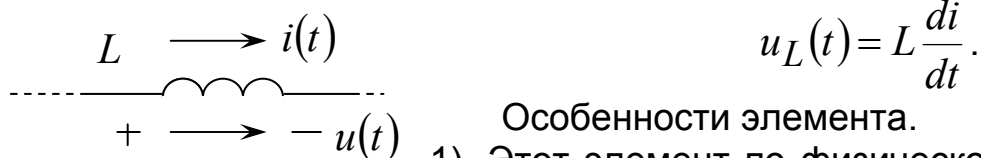


Рис. 7

Особенности элемента.

1). Этот элемент по физической природе является динамическим. Падение напряжения на элементе появляется только при изменении тока, протекающего через него. В статическом режиме при постоянном токе напряжение на элементе отсутствует.

2). Элемент является инерционным, т.е. ток через него не может измениться скачком при подключении напряжения (рис. 8):

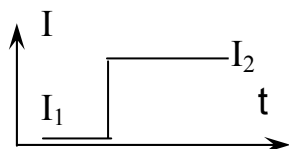


Рис. 8

$$\frac{di}{dt} \rightarrow \infty, \quad u_L \rightarrow \infty.$$

3). Числовой параметр, характеризующий элемент – индуктивность, который измеряется в Генри  $[L] = Гн$ . Этот элемент является накопителем энергии магнитного поля. Индуктивность определяет величину магнитного потока, создаваемого данным током (рис. 9)

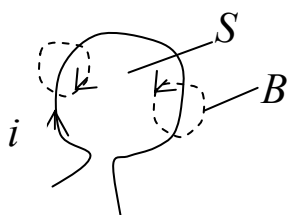


Рис. 9

$$L = \frac{\Phi}{i}, \quad \Phi = Li,$$

где магнитный поток

$$\Phi = \int_S \bar{B} d\bar{S}.$$

Скорость изменения магнитного потока определяет величину напряжения на индуктивности

$$u_L = \frac{d\Phi}{dt}, \quad u_L = L \frac{di}{dt}.$$

Следовательно, индуктивность является мерой инертности этого элемента относительно изменений тока, протекающего через него.

Индуктивные элементы имеют ограниченное применение и используются в фильтрующих элементах, а также в качестве элементов высокочастотной «развязки».

**Емкость** – это идеализированный пассивный линейный элемент, ток через который пропорционален скорости изменения напряжения на нем (рис. 10):

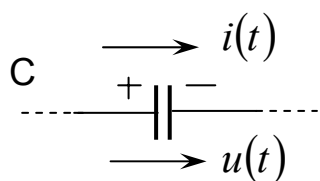


Рис. 10

$$i(t) = C \frac{du}{dt}.$$

Особенности элемента.

1). Этот элемент является накопителем энергии электрического поля. При подаче разности потенциалов  $U = \varphi_2 - \varphi_1$  на емкостную структуру на ее разнесенных элементах накапливаются противоположные по знаку заряды  $\pm q$  (рис.11). Между разнесенными зарядами появляется

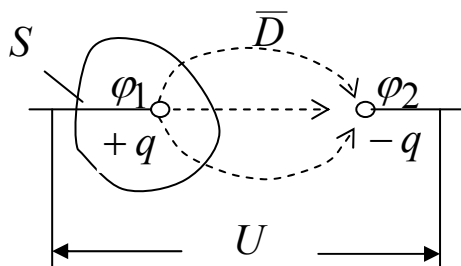


Рис. 11

электрическое поле, которое характеризуется величиной электрической индукции  $D$ ,  $Кл/м^2$ . Величина потока  $\Phi$  электрической индукции через замкнутую поверхность  $S$  определяется зарядом, заключенным внутри объема, ограниченного данной поверхностью

$$\Phi = \int_S \bar{D} d\bar{S} = q.$$

2). Числовой параметр, характеризующий элемент, – это емкость  $C$ , которая измеряется в фарадах либо в более «мелких» величинах: микрофарада –  $1\text{мкФ} = 10^{-6}\text{Ф}$ , нанофарада –  $1\text{нФ} = 10^{-9}\text{Ф}$ , пикофарада –  $1\text{пФ} = 10^{-12}\text{Ф}$ .

Емкость  $C$  определяет величину потока электрической индукции, создаваемого данной разностью потенциалов (напряжением)

$$C = \frac{\Phi}{U} = \frac{q}{U}.$$

Следовательно, емкость характеризует эффект накопления электрических зарядов

$$q = CU.$$

Если к емкостной структуре приложено напряжение  $U$ , то на ней накапливается заряд  $q$ , величина которого пропорциональна этому напряжению.

3). Этот элемент по физической природе является динамическим, т.е. реагирует на изменение напряжения, приложенного к нему.

Ток в емкостном элементе является следствием изменения заряда на нем:

$$i = \frac{dq}{dt}, \quad q = CU, \quad i = C \frac{du}{dt}.$$

Ток через элемент появляется только при изменении напряжения, приложенного к нему. В статическом режиме при постоянном напряжении ток через элемент отсутствует.

4). Элемент является инерционным, т.е. напряжение на нем не может измениться скачком (рис. 12), так как при

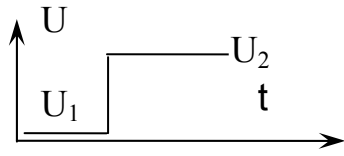


Рис. 12

$$\frac{du}{dt} \rightarrow \infty, \quad i \rightarrow \infty.$$

Например, при емкости  $C = 1 \text{ Ф}$ , изменение напряжения на емкости составит  $\Delta U = 1 \text{ В}$  в течение  $\Delta t = 1 \text{ с}$  вызовет емкостной ток

$$i = C \frac{\Delta U}{\Delta t} = 1 \text{ А}.$$

Иначе говоря, при наличии емкостного тока  $i = 1 \text{ А}$  в результате накопления зарядов на емкостном элементе напряжение на емкости за время  $\Delta t = 1 \text{ с}$  возрастет на  $1 \text{ В}$

$$\Delta U = \frac{i \Delta t}{C} = 1 \text{ В}.$$

При меньших параметрах емкостного элемента  $C = 1 \text{ мкФ}$  воздействие на него импульса тока  $i = 1 \text{ мА}$  длительностью  $\Delta t = 1 \text{ с}$  увеличит напряжение на нем

$$\Delta U = \frac{i \Delta t}{C} = 10^{-3} \cdot 1 \cdot 10^6 = 10^3 \text{ В}.$$

Аналогично при увеличении амплитуды импульса тока на порядок  $i = 1 \text{ мА}$  и сокращении длительности импульса тока на два порядка  $\Delta t = 10 \text{ мс} = 0,01 \text{ с}$  обеспечит заряд емкости, который сопровождается увеличением напряжения на ней

$$\Delta U = \frac{i \Delta t}{C} = (10 \cdot 10^{-3}) \cdot (10 \cdot 10^{-3}) \cdot \frac{1}{10^{-6}} = 100 \text{ В}.$$

**Вывод.** Математической моделью идеализированных элементов:  $R, L, C$  являются динамические уравнения, которые устанавливают взаимосвязь между мгновенными значениями токов и напряжений, действующих на этих элементах

$$u(t) = Ri(t), \quad i = C \frac{du}{dt}, \quad u_L = L \frac{di}{dt}.$$



### 1.2.1. Идеализированные реактивные элементы при гармоническом воздействии

*Метод комплексных амплитуд (символический метод)*

При гармоническом воздействии токи и напряжения на линейных элементах описываются косинусоидальным (синусоидальным) законом изменения

$$u(t) = U \cos(\omega t + \psi),$$

где  $u(t)$  – мгновенное напряжение,

$U$  – амплитуда,

$\psi$  – начальная фаза,

$\omega = 2\pi f = 2\pi/T$  – циклическая частота,

$\Phi(t) = \omega t + \psi$  – полная мгновенная фаза, причем,  $\omega = \frac{d\Phi}{dt}$ .

Мгновенное действительное напряжение может быть представлено в комплексной форме записи в виде мгновенного комплексного напряжения

$$\dot{i}(t) = U e^{j(\omega t + \psi)} = U e^{j\Phi(t)}.$$

Эти две формы представления гармонического напряжения взаимосвязаны (на основании формулы Эйлера)

$$\dot{i}(t) = U e^{j\Phi(t)} = U \cos \Phi(t) + jU \sin \Phi(t),$$

$$u(t) = \operatorname{Re}[\dot{i}(t)] = U \cos \Phi(t) = U \cos(\omega t + \psi).$$

В этом методе вводится обобщенное понятие амплитуды: комплексная амплитуда

$$\dot{U} = U e^{j\psi}.$$

Точка указывает на то, что кроме собственно амплитуды учитывается также начальная фаза. Следовательно, мгновенное комплексное колебание имеет вид

$$\dot{i}(t) = \dot{U} e^{j\omega t}.$$

Все расчеты в этом методе проводятся относительно комплексных амплитуд токов и напряжений.

Сопrotivления реактивных элементов также представляются в комплексной форме. Используя взаимосвязь мгновенных значений токов и напряжений

$$u_L = L \frac{di}{dt}, \quad i_C = C \frac{du}{dt},$$

Переходя к комплексной форме представления напряжений и токов

$$\dot{i}(t) = \dot{U} e^{j\omega t}, \quad i(t) = \dot{I} e^{j\omega t},$$

получим

$$\dot{i}_L(t) = \dot{U}_L e^{j\omega t} = L \frac{d}{dt} (\dot{i} e^{j\omega t}) = j\omega L \dot{i} e^{j\omega t},$$
$$i_C(t) = \dot{I}_C e^{j\omega t} = C \frac{d}{dt} (\dot{U} e^{j\omega t}) = j\omega C \dot{U} e^{j\omega t}.$$

Следовательно, в этом методе оператор дифференцирования заменяется на символический множитель  $j\omega$ :

$$\frac{d}{dt} \rightarrow (j\omega).$$

Сокращая обе части равенств на общий множитель  $e^{j\omega t}$ , получаем законы Ома в комплексной форме:

$$\dot{U}_L = (j\omega L) \dot{I}, \quad \dot{I}_C = (j\omega C) \dot{U}.$$

Таким образом, комплексные сопротивления реактивных элементов имеют следующий вид

$$Z_L = j\omega L = jX_L, \quad Z_C = \frac{1}{j\omega C} = -jX_C.$$

Соответствие этих элементов закону Ома (в комплексной форме) подтверждает их линейный характер

$$\dot{U}_L = Z_L \dot{I}, \quad \dot{I}_C = \frac{\dot{U}}{Z_C}.$$

Сопротивления реактивных элементов являются частотно-зависимыми, т.е. модули сопротивлений зависят от частоты

$$X_L = \omega L, \quad X_C = \frac{1}{\omega C}.$$

С увеличением частоты индуктивное сопротивление возрастает, а емкостное уменьшается.

Инерционность реактивных элементов проявляется также в фазовом сдвиге между изменениями тока и напряжения:

$$Z = \frac{\dot{U}}{\dot{I}} = \frac{U e^{j\psi_U}}{I e^{j\psi_I}} = Z e^{j(\psi_U - \psi_I)},$$

$$Z_L = jX_L = X_L e^{j\frac{\pi}{2}}, \quad Z_C = -jX_C = X_C e^{-j\frac{\pi}{2}}.$$

В индуктивном элементе напряжение опережает по фазе ток на  $90^\circ$

$$\psi_U - \psi_I = \frac{\pi}{2},$$

а в емкостном элементе напряжение отстает от тока на  $90^\circ$

$$\psi_U - \psi_I = -\frac{\pi}{2}.$$

Указанный фазовый сдвиг определяет также энергетический реактивный характер этих элементов, так как средняя мощность при этом оказывается равной нулю.

Физической причиной инерционности емкостного и индуктивного элементов является инерционность процессов энергообмена в них. Скорость изменения энергии, запасенной в элементе, определяет величину мощности, которая при этом выделяется в нем.

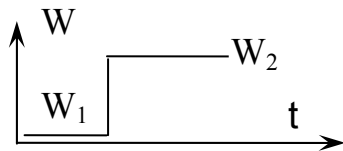


Рис. 13

Скачкообразное (мгновенное) изменение энергии привело бы к выделению бесконечно большой мощности (рис. 13)

$$p = \frac{dw}{dt} \rightarrow \infty.$$

Энергия, накапливаемая в реактивных элементах, определяется соответственно для индуктивности и емкости следующими соотношениями

$$W_L = \frac{Li^2}{2}, \quad W_C = \frac{Cu^2}{2}.$$

Отсюда следует непрерывность изменения тока в индуктивности и напряжения на емкости, т.е. без скачков

$$u_L = L \frac{di}{dt}, \quad i_C = C \frac{du}{dt}.$$

### 1.3. Активные элементы схемы

Активные элементы – это источники энергии, возбуждающие в схеме соответствующие токи напряжения.

Идеализированные активные элементы подразделяются на две разновидности:

- 1) идеальный независимый источник напряжения (генератор ЭДС);
- 2) идеальный независимый источник тока (генератор тока).

Генератор ЭДС – это источник энергии, напряжение на зажимах которого не зависит от тока, проходящего через него (рис. 1.14). Числовая характеристика элемента – это ЭДС на его зажимах  $E$ . ЭДС – это работа сил сторонних источников при переносе единицы заряда по замкнутому контуру.

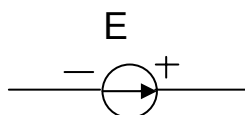


Рис. 1.14

Действие ЭДС вызывает повышение потенциала, поэтому внутри источника она направлена от низкого потенциала к высокому.

Основные свойства элемента:

- 1) величина ЭДС не зависит от сопротивления нагрузки;

- 2) внутреннее сопротивление источника равно нулю  $R_i = 0$ ;
- 3) в источнике отсутствуют потери энергии;
- 4) генератор ЭДС является источником бесконечно большой мощности; при любой величине сопротивления нагрузки ток во внешней цепи  $I = E/R_H$ .

Генератор тока – это активный элемент, ток которого не зависит от величины напряжения на его зажимах (рис. 1.15). Основной числовой параметр источника – величина генерируемого тока  $I$ , отдаваемого во внешнюю цепь. Основные свойства элемента:

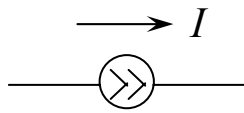


Рис. 1.15

- 1) величина тока, генерируемого элементом, не зависит от сопротивления нагрузки;
- 2) внутреннее сопротивление источника бесконечно велико (через элемент не могут протекать токи других источников);
- 3) этот элемент является источником бесконечно большой мощности; при любой величине сопротивления нагрузки напряжение на его зажимах  $U = IR_H$ , а мощность  $P = UI$ .

*Замечание:* в соответствии со свойствами источники генератора ЭДС не могут быть соединены параллельно, а генераторы тока – последовательно.

#### 1.4. Электронная схема и ее основные законы

*Схема* – это графическое представление модели устройства, составленной из идеализированных элементов (рис. 1.16).

*Узел* – точка, в которой соединены три и более элемента. *Ветвь* – участок схемы между двумя узлами, не разделенный третьим узлом (по данной ветви протекает один и тот же ток). *Контур* – произвольный замкнутый путь в схеме.

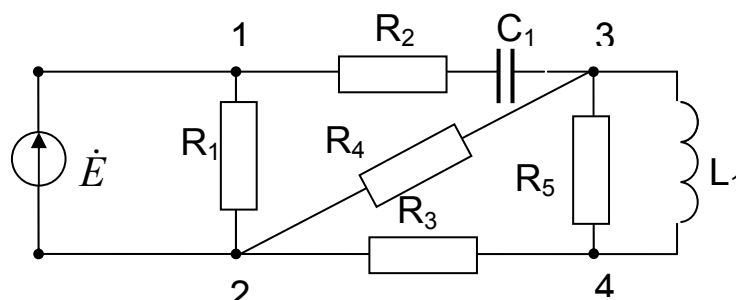


Рис. 1.16

В схеме можно выделить группы элементов, соединенных между собой простейшим способом: последовательное и параллельное соединение.

*Последовательное соединение* – это такое соединение элементов, через которые протекает один и тот же ток (рис. 1.17). Между

элементами последовательного соединения должны отсутствовать узлы, т.е. ток не должен ответвляться в другие ветви схемы. На рис. 1.16 элементы  $R_2, C_1$  соединены последовательно. При последовательном соединении общее сопротивление возрастает. На рис. 1.18 элементы  $R_2, R_3$  не являются последовательно соединенными.

**Параллельное соединение** – это такое соединение элементов, к которым приложено одно и то же напряжение. Зажимы элементов при параллельном соединении объединяются попарно. На схеме (рис. 1.16) элементы  $R_5, L_1$  соединены параллельно. На схеме рис. 1.18 элементы  $R_2, R_1$  также являются параллельно соединенными.

При параллельном соединении общее сопротивление уменьшается (возрастает проводимость).

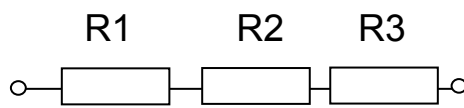


Рис. 1.17

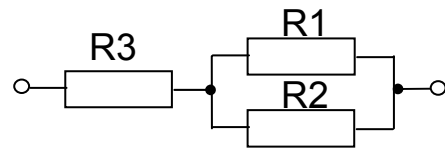


Рис. 1.18

Закон Ома устанавливает связь между током и напряжением, действующим на данном пассивном элементе или ветви схемы

$$U = IR.$$

При известном токе через данный элемент с сопротивлением  $R$  вычисляется падение напряжения на этом элементе, т.е. уменьшение потенциала при протекании тока через данный элемент.

Например, на рис. 1.19 при известном напряжении  $U_1 = 10$  В, измеренном относительно нулевого потенциала, при сопротивлении  $R_2 = 2$  кОм и токе  $I_2 = 1$  мА падение напряжения на этом элементе составит

$$U = I_2 R_2 = 1 \cdot 10^{-3} \cdot 2 \cdot 10^3 = 2 \text{ В}.$$

Следовательно, напряжение в узле 2 относительно нулевого потенциала составит

$$U_2 = U_1 - U = 10 - 2 = 8 \text{ В}.$$

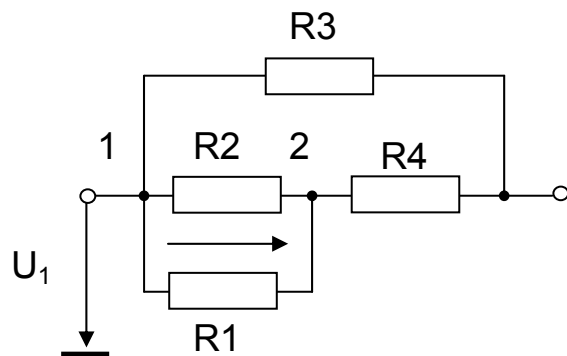


Рис. 1.19

Распределение токов в ветвях схемы, а также перераспределение напряжений определяют законы Кирхгофа, соответственно 1-ый закон (закон токов), 2-ой закон (закон напряжений).

**1-ый закон Кирхгофа.** Алгебраическая сумма токов в узле равна нулю (сумма токов, входящих в узел, равна сумме токов, выходящих из узла):

$$I_1 + I_2 = I_3 + I_4 + I_5, \quad \text{или} \quad I_1 + I_2 - I_3 - I_4 - I_5 = 0,$$

В сокращенной форме записи

$$\sum_{k=1}^5 I_k = 0.$$

Этот закон является следствием закона сохранения заряда в его динамической интерпретации. Он отражает факт невозможности накопления зарядов в узле (математической точке). Количество заряда, втекающего в узел, равно сумме зарядов, вытекающих из узла:

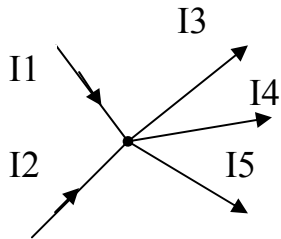


Рис. 1. 20

$$q_1 + q_2 = q_3 + q_4 + q_5.$$

После взятия производной по времени получаем равенство для токов

$$I_1 + I_2 = I_3 + I_4 + I_5.$$

**Обобщение закона:** алгебраическая сумма токов, пересекающих любое сечение схемы, равна нулю (рис. 1.21)

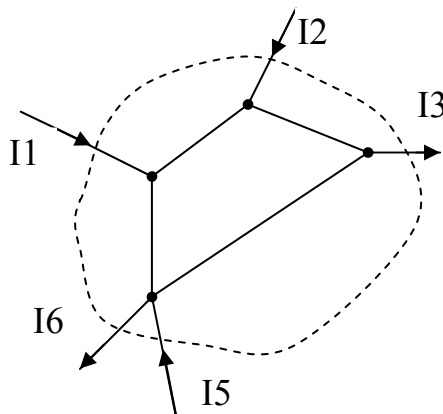


Рис. 1.21

$$I_3 + I_6 = I_1 + I_2 + I_5.$$

Например, в схеме на рис. 1.22 при соотношении напряжений, измеренных относительно «земли»  $U_1 > U_2$ , протекают следующие токи:  $I_1 = 2\text{мА}$ ,  $I_3 = 5\text{мА}$ , тогда неизвестный ток составит

$$I_2 = I_3 - I_1 = 5 - 2 = 3\text{мА}.$$

**Замечание.** В цепях переменного тока при гармоническом возбуждении осуществляется не алгебраическое, а геометрическое суммирование токов (рис. 1.23).

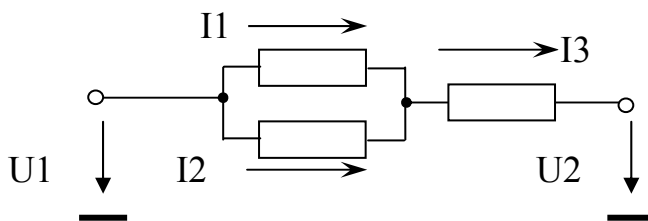


Рис. 1.22

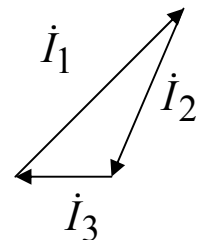


Рис. 1.23

**Следствие 1-го закона Кирхгофа.** При параллельном соединении элементов (рис. 1.24) уравнение для токов имеет следующий вид:

$$I = I_1 + I_2 + I_3.$$

Выразим токи через элементы схемы:

$$U = IR, \quad \text{т.е.} \quad I = \frac{U}{R} = Ug, \quad [g] = C_M = \frac{1}{O_M},$$

где  $g$  – проводимость элемента, которая измеряется в Сименсах.

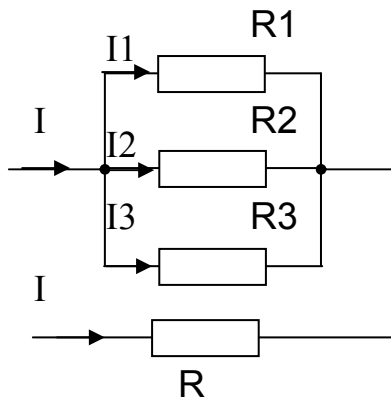


Рис. 1.24

На всех элементах действует одно и то же напряжение, поэтому

$$Ug = U(g_1 + g_2 + g_3),$$

$$g = g_1 + g_2 + g_3.$$

Эквивалентная проводимость параллельно соединенных элементов определяется суммой проводимостей всех элементов, или

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}, \quad R = \frac{1}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}}.$$

В частном случае при равных сопротивлениях имеем

$$R = \frac{R_1}{3}.$$

При наличии только двух сопротивлений формула приобретает следующий вид

$$R = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}.$$

Отметим качественное свойство параллельного соединения: общее (эквивалентное) сопротивление двух параллельно соединенных элементов по величине меньше наименьшего из сопротивлений:

если  $R_1 < R_2$ , т.е.  $\frac{R_1}{R_2} < 1$ , тогда  $R = \frac{R_1}{1 + \frac{R_1}{R_2}} < R_1$ .

При существенном отличии в величинах сопротивлений общее сопротивление приблизительно равно меньшему сопротивлению, действительно

$$\varepsilon = \frac{R_1}{R_2} = 0,1, \quad \text{тогда} \quad R = \frac{R_1}{1 + 0,1} \approx R_1.$$

Более точно значение эквивалентного сопротивления можно найти по приближенной формуле с учетом первого порядка малости

$$R \approx R_1(1 - \varepsilon) = R_1(1 - 0,1) = 0,9R_1.$$

При приближенных расчетах иногда можно использовать частный случай формулы для идентичных сопротивлений. Например, при  $R_1 = 3,33 \text{ кОм}$ ,  $R_2 = 10 \text{ кОм}$  можно заменить сопротивление  $R_1$  на три параллельно соединенных элемента

$$R_1 = \frac{R_2}{3} = 3,33 \text{ кОм}.$$

Тогда эквивалентное сопротивление определяется по формуле одинаковых сопротивлений

$$R = \frac{R_2}{4} = \frac{10}{4} = 2,5 \text{ кОм}.$$

Два параллельно соединенных элемента образуют делитель тока (рис. 1.25). Так как при параллельном соединении напряжение на

элементах одинаковое, то  $I_1 R_1 = I_2 R_2$ , следовательно

$$\frac{I_1}{I_2} = \frac{R_2}{R_1} = \frac{g_1}{g_2}.$$

Очевидно, что токи в ветвях прямо пропорциональны проводимостям ветвей или обратно пропорциональны их сопротивлениям. Это позволяет определять ток во второй ветви при известном токе в первой

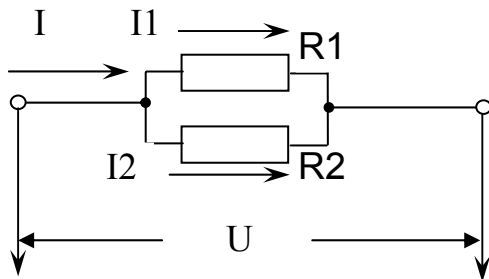


Рис. 1.25

ном токе в первой

$$I_2 = I_1 \frac{R_1}{R_2}.$$

Аналогично можно определить токи в ветвях делителя при известном общем токе  $I$  и элементах делителя  $R_1, R_2$ .

Сравнивая напряжение одной из ветвей с напряжением на делителе

$$I \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} = I_1 R_1,$$

получаем

$$I_1 = I \frac{R_2}{R_1 + R_2},$$

или аналогично для другой ветви

$$I_2 = I \frac{R_1}{R_1 + R_2}.$$

Например, при общем токе делителя  $I = 10 \text{ мА}$ , и известных его элементах  $R_1 = 2 \text{ кОм}$ ,  $R_2 = 3 \text{ кОм}$  токи в ветвях делителя определяются из следующих формул

$$I_1 = I \frac{R_2}{R_1 + R_2} = 10 \frac{3}{2 + 3} = 6 \text{ мА}, \quad I_2 = I \frac{R_1}{R_1 + R_2} = 10 \frac{2}{2 + 3} = 4 \text{ мА}.$$



Обобщим формулу делителя тока на схему, состоящую из трех элементов (рис. 1.26):

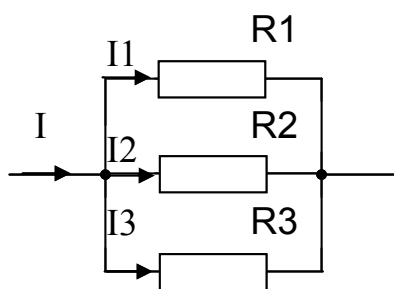


Рис. 1.26

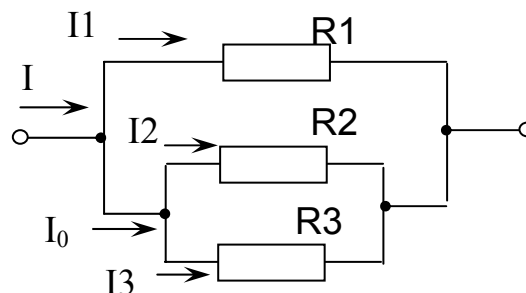


Рис. 1.26а

Представим схему в виде рис. 1.26а. Используя последовательно формулу делителя тока, получим

$$I_1 = I \frac{\frac{R_2 R_3}{R_2 + R_3}}{R_1 + \frac{R_2 R_3}{R_2 + R_3}} = I \frac{R_2 R_3}{R_1 R_2 + R_1 R_3 + R_2 R_3};$$

$$I_0 = I \frac{R_1}{R_1 + \frac{R_2 R_3}{R_2 + R_3}} = I \frac{R_1 R_2 + R_1 R_3}{R_1 R_2 + R_1 R_3 + R_2 R_3};$$

$$I_2 = I_0 \frac{R_3}{R_2 + R_3} = \frac{R_1 R_3}{R_1 R_2 + R_1 R_3 + R_2 R_3};$$

$$I_3 = I_0 \frac{R_2}{R_2 + R_3} = \frac{R_1 R_2}{R_1 R_2 + R_1 R_3 + R_2 R_3}.$$

**2-ой закон Кирхгофа.** Алгебраическая сумма падений напряжений на элементах замкнутого контура равна алгебраической сумме ЭДС, действующих в этом контуре

$$\sum_{k=1}^n U_k = \sum_{i=1}^m E_i.$$

Например, для схемы, приведенной на рис. 1.27, общее выражение примет следующий вид

$$I_1 R_1 - I_3 (R_3 + R_4) = E_1 - E_2;$$

$$U_1 - U_3 - U_4 = E_1 - E_2.$$

Знаки падений напряжений и ЭДС берутся в соответствии с направлением обхода контура и направлений действия ЭДС и падений напряжений на элементах контура (направлений токов).

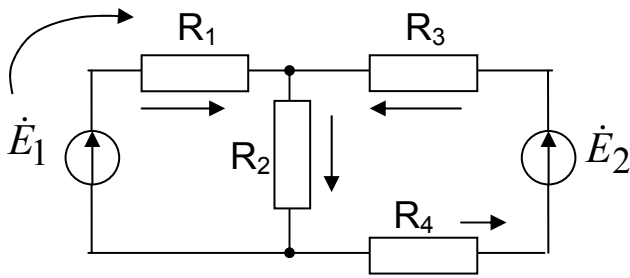


Рис. 1.27

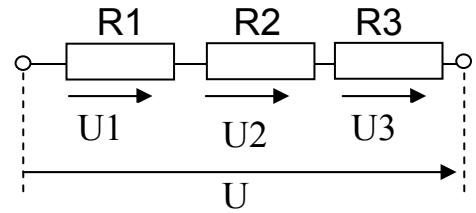


Рис. 1.28

*Следствие.* Общее напряжение на двухполюснике равно сумме падений напряжений на его элементах (рис. 1.28)

$$U = U_1 + U_2 + U_3, \quad IR = IR_1 + IR_2 + IR_3,$$

откуда следует

$$R = R_1 + R_2 + R_3.$$

Общее эквивалентное сопротивление последовательно соединенных элементов равно сумме сопротивлений всех его элементов.

*Делитель напряжения* состоит из двух последовательно соединенных сопротивлений, причем, входное напряжение подается на два элемента, а выходное снимается с одного из них (плечо делителя) (рис. 1.29).

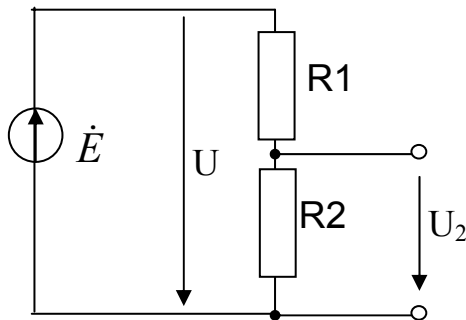


Рис. 1.29

Выразив выходное напряжение через входное, получим

$$U_2 = IR_2 = \frac{U}{R_1 + R_2} R_2 = U \frac{R_2}{R_1 + R_2}, \text{ или}$$

$$U_2 = \frac{U}{1 + \frac{R_1}{R_2}}.$$

Например, при требуемом соотношении напряжений  $U_2 = U/3$  сопротивления делителя должны удовлетворять следующему равенству

$$\frac{R_1}{R_2} = 2, \quad \text{или} \quad R_1 = 2R_2.$$

Падения напряжений на сопротивлениях делителя прямо пропорциональны соответствующим сопротивлениям

$$I = \frac{U_1}{R_1} = \frac{U_2}{R_2}, \quad \text{откуда} \quad \frac{U_1}{U_2} = \frac{R_1}{R_2}.$$

Подключение к делителю резистора нагрузки в общем случае изменяет выходное напряжение (уменьшает его). Действительно, эквивалентное сопротивление нижнего плеча делителя

$$R_{\text{Э}} = \frac{R_2 R_H}{R_2 + R_H}$$

уменьшается, что приводит к уменьшению выходного напряжения. Высокоомная нагрузка  $R_H \gg R_2$  практически не изменяет выходного сопротивления.

## 1.5. Реальные источники тока и напряжения

Реальные источники – это источники конечной мощности.

*Источник напряжения* имеет малое внутреннее сопротивление, которое подключается последовательно с идеальным генератором ЭДС (рис. 1.30). При увеличении тока, отдаваемого в нагрузку, напряжение на внешних зажимах источника уменьшается

$$U = E - IR.$$

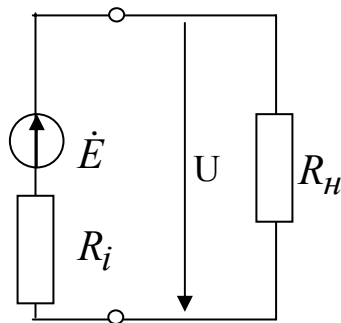


Рис. 1.30

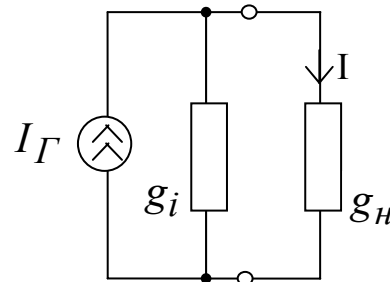


Рис. 1.31

При этом величина ЭДС делится между внутренним сопротивлением и сопротивлением нагрузки

$$U = IR_H = \frac{E}{R_i + R_H} R_H, \quad U = \frac{E}{1 + \frac{R_i}{R_H}}.$$

*Реальный источник тока* содержит большое внутреннее сопротивление (малую проводимость), подключенное параллельно идеальному генератору тока (рис. 1.31). Величина генерируемого тока перераспределяется (делится) между проводимостями  $g_i$  и  $g_H$ :

$$I = Ug_H = \frac{I_{\Gamma}}{g_i + g_H} g_H, \quad I = \frac{I_{\Gamma}}{1 + \frac{g_i}{g_H}}.$$

Ток и напряжение реальных источников меньше соответствующих идеальных параметров из-за наличия внутренних сопротивлений:

$$U = E - IR_i, \quad I = I_\Gamma - Ug_i.$$

Реальные источники близки к идеальным, если соблюдаются следующие соотношения:

$$\frac{R_i}{R_H} \ll 1 \text{ – в генераторе ЭДС; } \frac{g_i}{g_H} \ll 1 \text{ – в генераторе тока.}$$

### 1.5.2. Реальные пассивные элементы

Реальные пассивные элементы реализуются в виде: резисторов, конденсаторов, катушек индуктивности. Последние имеют ограниченное применение.

*Резистор* – это физическая реализация идеализированного сопротивления. В общем случае эквивалентная схема резистора содержит емкость и индуктивность:  $R$  – сопротивление,  $L, C$  – паразитные параметры резистора (рис. 1.31). Индуктивность отображает способность реального элемента запасать энергию магнитного поля (например, индуктивность выводов). Емкость – появляется между участками резистора и рядом расположенными элементами схемы. Для уменьшения индуктивности некоторые резисторы реализуются в виде прямолинейного бруска.

Условное графическое обозначение резистора и подстроечного резистора показано на рис. 1.32.

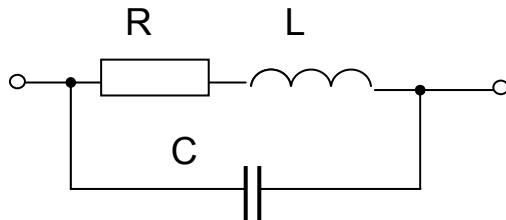


Рис. 1.31

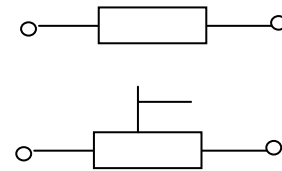


Рис. 1.32

#### Основные параметры резисторов.

1. Номинальное сопротивление. Этот параметр указывается в соответствии с одним из стандартных рядов сопротивлений ( $E_n$ ): E6, E12, E24, E48, E96, E192. Ряды E представляют собой геометрическую прогрессию со знаменателем  $q_n = \sqrt[n]{10}$ , например,  $q_6 = \sqrt[6]{10} = 1,47$ . Тогда стандартный ряд E6 (с учетом округления) состоит из следующих величин: 1,0; 1,5; 2,2; 3,3; 4,7; 6,8 и т.д. Значение сопротивления задают умножением стандартного числа ряда на порядковую величину  $10^m$ ,  $m=0,1,2,3,\dots$ .

2. Допустимое отклонение сопротивления от номинальной величины:

$\pm \frac{\Delta R}{R} \%$  – 2%, 5%, 10%, 20%, прецизионные сопротивления имеют отклонения 0,5%, 1%.

3. Номинальная мощность рассеивания – это максимальная мощность, которую может рассеивать резистор без изменения своих параметров (рис. 1.33). Этот параметр определяет габариты резистора.

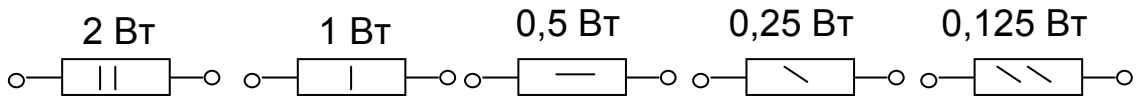


Рис. 1.33

4. Температурный коэффициент сопротивления – определяет изменение сопротивления резистора при изменении температуры на 1 градус

$$TKC = \frac{\Delta R}{R_0 \Delta t} \cdot 100 \frac{\%}{град}$$

Дискретные варианты резисторов выполняются путем осаждения токопроводящей пленки на изоляционное основание. В качестве токо-

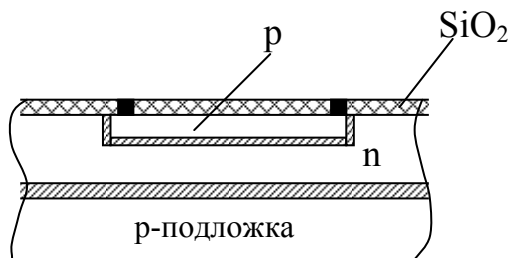


Рис. 1.34

проводящего элемента применяют различные материалы. Резисторы подразделяют на такие виды: пленочные, металлопленочные, металлооксидные, металлодиэлектрические, композиционные. В интегральной схемотехнике применяют полупроводниковые резисторы, например, диффузионный резистор. На

рис. 1.34 р-слой является резистивным слоем, р/п - переход выполняет роль изолирующей области.

Тонкопленочные резисторы формируют в виде тонкой проводящей пленки на поверхности кремниевой пластины.

В технической документации при задании номиналов резисторов обязательно приводятся его основные параметры:

0,25 Вт - 100 кОм ± 2%.

Для задания номинала резистора (система маркировки) на его корпусе применяют: а) кодированное обозначение, б) цветную маркировку.

Кодированное обозначение номинала содержит две или три цифры и букву. Буква соответствует десятичному множителю, на который умножается цифровое обозначение:

| R | K      | M      | G      | T         |
|---|--------|--------|--------|-----------|
| 1 | $10^3$ | $10^6$ | $10^9$ | $10^{12}$ |

Например, R1 – 0,1 Ом; 10R – 10 Ом; 100R – или K10 – 100 Ом; 33M2 – 33,2 МОм. (В прежней маркировке вместо буквы R использовалась E).

После номинала стоит буква, обозначающая отклонение в % от номинала в соответствии со следующей таблицей

Таблица 1

|        |        |        |       |       |       |      |      |      |    |
|--------|--------|--------|-------|-------|-------|------|------|------|----|
| ±0,001 | ±0,002 | ±0,005 | ±0,01 | ±0,02 | ±0,05 | ±0,1 | ±0,2 | ±0,5 | ±1 |
| E      | L      | R      | P     | U     | X     | B    | C    | D    | F  |

продолжение таблицы

|    |    |     |     |     |
|----|----|-----|-----|-----|
| ±2 | ±5 | ±10 | ±20 | ±30 |
| G  | I  | K   | M   | N   |

Например, K475G, что соответствует 475 Ом±2%.

Цветную маркировку в виде последовательности 4-х или 5-ти цветных полосок наносят на малогабаритные резисторы. Маркировка читается слева направо. Цветные полоски смещены к левому краю резистора. Если полоски занимают всю поверхность корпуса, то самая широкая полоска является последней.

Первые две (или три) полоски определяют цифровой номинал резистора, 4-я – множитель, 5-я – отклонение от номинала в процентах. Наличие только 4-х полосок говорит о том, что значение сопротивления выражается только двумя цифрами (56 Ом), или третья цифра сопротивления – нулевая (490 Ом).

Таблица 2

| Цвет полоски | Номинал, Ом |     |     |               | Допуск % |
|--------------|-------------|-----|-----|---------------|----------|
|              | 1-я         | 2-я | 3-я | $\times 10^n$ |          |
| серебристый  | -           | -   | -   | $10^{-2}$     | ±10      |
| золотистый   | -           | -   | -   | $10^{-1}$     | ±5       |
| черный       | -           | -   | -   | 1             | -        |
| коричневый   | 1           | 1   | 1   | 10            | ±1       |
| красный      | 2           | 2   | 2   | $10^2$        | ±2       |
| оранжевый    | 3           | 3   | 3   | $10^3$        | -        |
| желтый       | 4           | 4   | 4   | $10^4$        | -        |
| зеленый      | 5           | 5   | 5   | $10^5$        | ±0,5     |
| голубой      | 6           | 6   | 6   | $10^6$        | ±0,25    |
| фиолетовый   | 7           | 7   | 7   | $10^7$        | ±0,1     |
| серый        | 8           | 8   | 8   | $10^8$        | ±0,05    |
| белый        | 9           | 9   | 9   | $10^9$        | -        |

*Конденсатор* – это физическая реализация идеализированной емкости. Эквивалентные схемы конденсаторов могут соответствовать как последовательной так и параллельно-последовательной схеме включения (рис. 1.35).

Значения элементов не совпадают и пересчитываются по правилу эквивалентных преобразований схем.

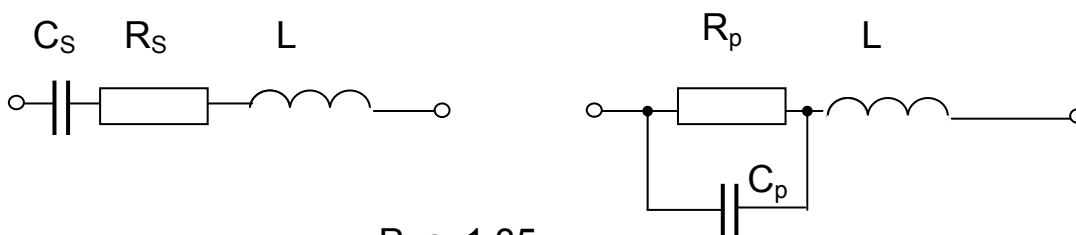


Рис. 1.35

Рабочий диапазон частот ограничен такой максимальной частотой, где влиянием индуктивности можно пренебречь.

Основные параметры конденсаторов.

1. Номинальная емкость конденсатора, соответствует стандартному ряду емкостей (аналогично резистору).
2. Допустимое отклонение от номинального значения в процентах

$$\frac{C - C_0}{C_0} \cdot 100\%.$$

3. Температурный коэффициент емкости

$$TKE = \frac{\Delta C}{C_0 \Delta t} \cdot 100 \frac{\%}{град}.$$

4. Номинальное рабочее напряжение – максимальное напряжение, при котором конденсатор сохраняет параметры в течение заданного времени наработки.

К дополнительным параметрам относятся: сопротивление изоляции, тангенс угла потерь (добротность).

Номинальная емкость маркируется цифрами и буквой, определяющей десятичный множитель:

| Фарада,<br>Ф | Миллифарада,<br>мФ | Микрофарада,<br>мкФ | Нанофарада,<br>нФ | Пикофарада,<br>пФ |
|--------------|--------------------|---------------------|-------------------|-------------------|
| F            | m                  | $\mu$               | n                 | p                 |
| 1            | $10^3$             | $10^6$              | $10^9$            | $10^{12}$         |

Например, 0,1пФ – p10; 10пФ – 10p; 100пФ – 100p (n10); 590пФ – (n59).

При задании номинала конденсатора обязательно указываются: номинал, допустимое отклонение и ТКЕ: 100пФ±10%M.

В зависимости от материала диэлектрика ТКЕ может положительным или отрицательным. Величина ТКЕ кодируется соответствующей латинской буквой (в примере M – соответствует ТКЕ = - 47·10<sup>-6</sup> 1/град.

Для обозначения ТКЕ используется цветная кодировка корпуса конденсатора: синий и серый цвет соответствует положительному ТКЕ; красный и зеленый – отрицательному; голубой – близкий к нулю.

Допустимые изменения емкости под действием температуры кодируются цветной точкой.

Номенклатура конденсаторов обширна. Разновидности дискретных конденсаторов определяются видом диэлектрика (технологией изготовления). Интегральные конденсаторы реализуются на основе электронно-дырочных переходов, структурах МДП, тонкопленочных структурах.

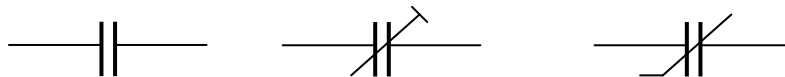


Рис. 1.36

Дискретные конденсаторы могут быть реализованы как подстроечные (с механической подстройкой). В нелинейных конденсаторах, выполненных на основе сегнетоэлектриков, емкость зависит от напряжения (вариконды). На рис. 1.36 показаны условные графические обозначения конденсаторов: постоянной емкости, подстроечного, вариконда.

### 1.5.3. Устройства механической коммутации

Это устройства, предназначенные для включения, выключения и переключения электрических цепей.

Переключатели (тумблеры) делятся на однопозиционные и двухпозиционные (рис. 1.37).

В двухпозиционном элементе переключающий контакт замыкает один из неподвижных контактов 2 или 3.



Рис. 1.37

В зависимости от числа коммутируемых ветвей переключатели делятся на однополюсные и двухполюсные: сдвоенный однопозиционный (рис. 1.38), двухполюсный двухпозиционный (рис. 1.38а).

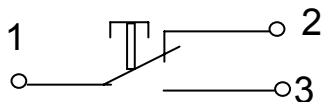


Рис. 1.39

Еще одной разновидностью переключателей является кнопочный переключатель (микротумблер) (рис. 1.39). Этот двухпозиционный переключатель изменяет коммутирующие контакты (2,3) при последовательных нажатиях.

Возможны варианты кнопочных переключателей с мгновенным контактом (без фиксации нового состояния): нормально разомкнутый и нормально замкнутый.



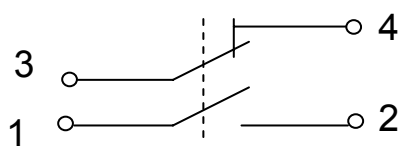


Рис. 1.38

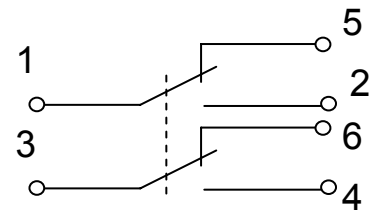


Рис. 1.38а

К основным параметрам переключателей относятся: 1) коммутируемый ток, 2) коммутируемое напряжение.

*Реле* – это электромеханический коммутирующий управляемый элемент. Состояние (положение) коммутируемых контактов определяется величиной тока через управляющую катушку. Особенность элемента: управляющая цепь изолирована от коммутируемых контактов.

В зависимости от конструктивных особенностей различают реле с нормально разомкнутыми (рис. 1.40), нормально замкнутыми или переключаемыми контактами (рис. 1.40а), (рис.1.40б).

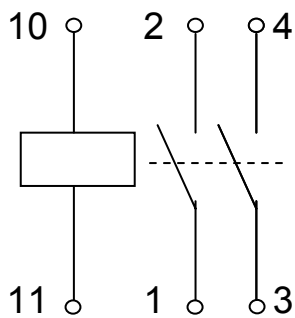


Рис. 1.40

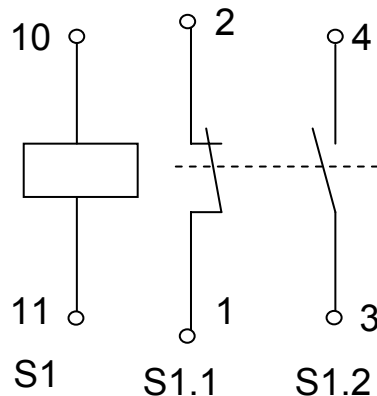


Рис. 1.40а

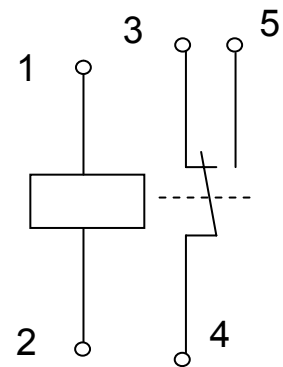


Рис. 1.40б

Контакты реле обозначают двумя цифрами, разделенными точкой: первая цифра – это порядковый номер реле, вторая – номер контактной пары (рис. 1.40а).

Основные параметры реле: 1) ток срабатывания (определяет его чувствительность), 2) ток отпускания, 3) рабочее напряжение, 4) максимальный коммутируемый ток, 5) номинальное сопротивление обмотки катушки реле.

## 2.1. Классификация сигналов и их параметры

Сигнал – это объективный (электрический) процесс, протекающий во времени и содержащий некоторую информацию:  $S(t), i(t), u(t)$ .

В зависимости от характера временного процесса сигналы делятся на периодические (повторяющиеся во времени)  $S(t) = S(t + T)$ , где  $T$  – период сигнала и непериодические.

Примеры периодических сигналов:

А) гармонический сигнал (рис. 2.1)  $u(t) = U_m \sin(\omega t + \varphi)$ ;

Б) периодическая последовательность импульсов (рис. 2.2)

$s(t) = \sum_{k=0}^{\infty} S_0(t + kT)$ , где одиночный прямоугольный импульс последовательности

$$S_0(t) = \begin{cases} S_m, & 0 < t < \tau \\ 0, & \tau \leq t < T \end{cases}$$

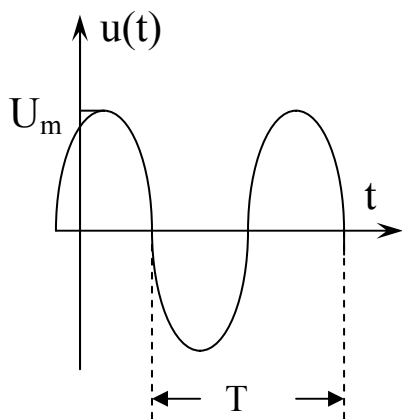


Рис. 2.1

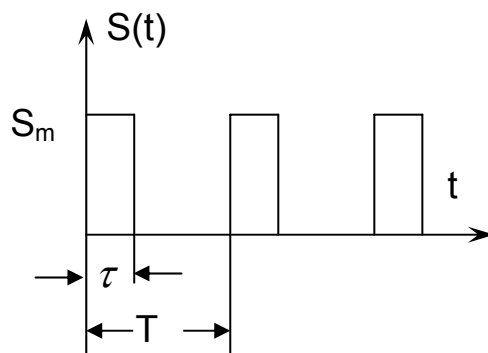


Рис. 2.2

В) функция Уолша (Адамара)  $s(t) = Wal_9(t)$  (рис. 2.2a).

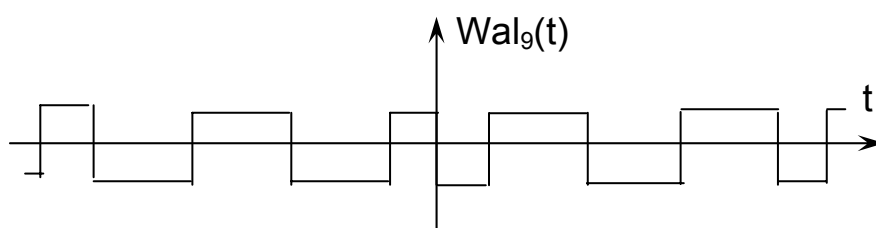


Рис. 2.2a

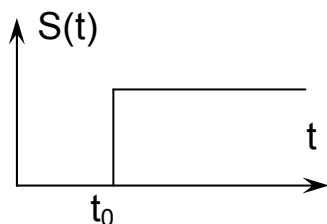


Рис. 2.3

В зависимости от характера динамики сигнала различают непрерывные (аналоговые) сигналы и импульсные сигналы.

Под импульсным сигналом понимают кратковременные изменения тока или напряжения. Простейший импульсный сигнал представляет собой скачок (перепад) тока или напряжения (рис. 2.3).

Непериодические импульсные сигналы

отличают по форме одиночного импульса. Идеализированные импульсные сигналы имеют следующую форму: прямоугольную, треугольную, пилообразную, трапецеидальную, экспоненциальную. Такими импульсами аппроксимируют (заменяют) реальные импульсы (рис. 2.4).

Аналоговый сигнал можно представить в виде эквивалентного дискретного сигнала в результате процесса дискретизации, приведенного на рис. 2.5, где  $S_{II}(t)$  – последовательность прямоугольных периодических импульсов. Эквивалентность аналогового и дискретного представления сигнала отписывает теорема отсчетов (Котельникова).

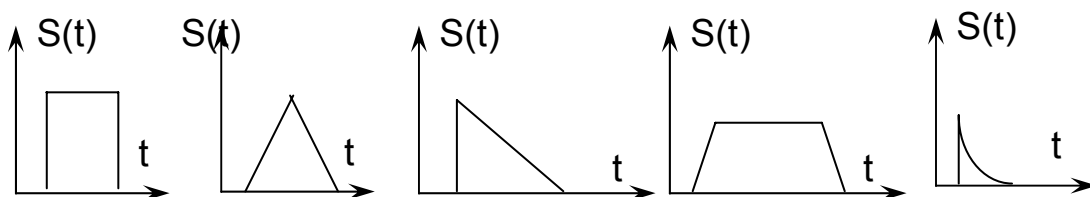


Рис. 2.4

Цифровой сигнал (в широком смысле) – это сигнал, дискретизированный во времени и квантованный по уровням. Такой сигнал задается в виде массива цифр.

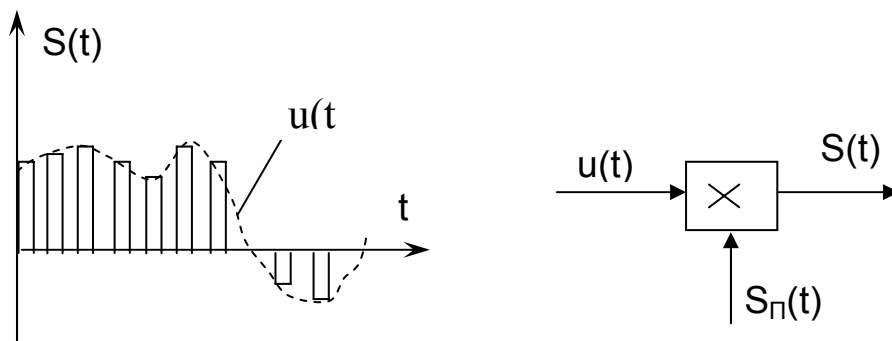


Рис. 2.5

Цифровой сигнал (в узком смысле) – это импульсная последовательность, в которой напряжение может принимать только два значения: высокий логический уровень  $U^1$  и низкий уровень  $U^0$  (рис. 2.6).

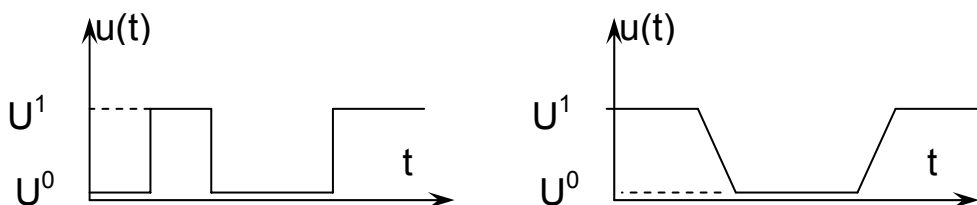


Рис. 2.6

Основные параметры периодических сигналов.

1. Геометрические параметры:

- период сигнала  $T$ ;

- частота повторения  $F = 1/T$ ,  $\omega = 2\pi F = 2\pi / T$ ;
- амплитуда (максимальное мгновенное значение сигнала).

Для периодической импульсной последовательности вводят дополнительные параметры:

- длительность импульса  $\tau$ ;
- скважность  $Q = T/\tau$ ;
- коэффициент заполнения  $\gamma = 1/Q$ .

## 2. Энергетические характеристики:

- мгновенная мощность сигнала  $p(t) = s^2(t)$ ; если  $s(t)$  – это напряжение (ток), то  $s^2(t)$  представляет собой мощность, которая выделяется на сопротивлении  $R = 1\text{Ом}$ ;
- энергия сигнала на интервале

$$E = \int_0^T p(t)dt = \int_0^T s^2(t)dt, \quad \text{так как} \quad P = \frac{E}{T}, \quad \text{т.е.} \quad E = PT;$$

- средняя мощность сигнала

$$P_{cp} = \frac{E}{T} = \frac{1}{T} \int_0^T s^2(t)dt.$$

Среднее значение последовательности импульсов (постоянная составляющая сигнала)

$$U_0 = \frac{1}{T} \int_0^T u(t)dt.$$

Геометрический смысл постоянной составляющей. Заменяем синусоидальный импульс эквивалентным по площади прямоугольником на интервале, равном периоду сигнала (рис. 2.7). Тогда постоянная составляющая – это высота эквивалентного по площади прямоугольника с основанием, равным периоду сигнала.

Площадь синусоидального импульса

$$S_1 = \int_0^{\frac{T}{2}} U_m \sin(\omega t) dt = -U_m \frac{1}{\omega} \cos(\omega t) \Big|_0^{T/2} = -U_m \frac{T}{2\pi} \left[ \cos\left(\frac{2\pi T}{T} \frac{1}{2}\right) - \cos 0 \right]$$

$$= -U_m \frac{T}{2\pi} (-2) = \frac{U_m T}{\pi}; \quad S_2 = U_0 T.$$

Приравнявая площади, имеем

$$S_1 = S_2, \quad \frac{U_m T}{\pi} = U_0 T, \quad U_0 = \frac{U_m}{\pi}.$$

Для периодической последовательности прямоугольных импульсов величина постоянной составляющей определяется аналогично (рис. 2.8)

$$U_m \tau = U_0 T, \quad U_0 = U_m \frac{\tau}{T} = \frac{U_m}{Q}.$$

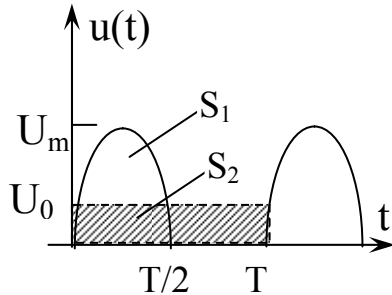


Рис. 2.7

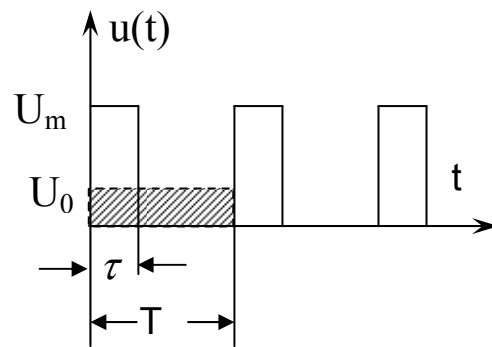


Рис. 2.8

С физической точки зрения постоянная составляющая представляет собой такое постоянное напряжение, которое не пропускает разделительная емкость.

Периодический сигнал можно представить в виде совокупности простейших ортогональных сигналов  $\eta_k(t)$

$$S(t) = \sum_{k=0}^{\infty} C_k \eta_k(t),$$

где коэффициенты разложения определяются по следующей формуле

$$C_k = \frac{1}{P_k} \frac{1}{T} \int_0^T S(t) \eta_k(t) dt,$$

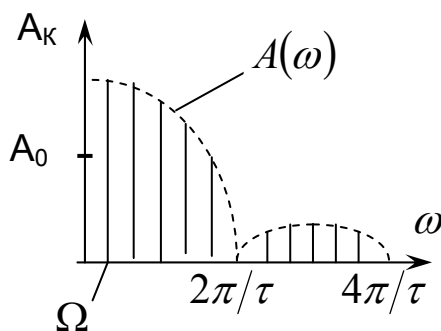


Рис. 2.9

с учетом свойства ортогональности

$$\frac{1}{T} \int_0^T \eta_k(t) \eta_m(t) dt = \begin{cases} 0, & k \neq m \\ P_k, & k = m \end{cases}$$

Например, для гармонического базиса

$$S(t) = C_0 + \sum_{k=1}^{\infty} C_k \cos(k\Omega t - \varphi_k), \quad \text{где } \Omega = \frac{2\pi}{T}.$$

Упорядоченная совокупность амплитуд гармонических составляющих представляет собой спектр сигнала. Спектральная диаграмма – это графическое представление спектра (рис. 2.9). Для прямоугольной последовательности импульсов огибающая спектра имеет такой вид

$$C(\omega) = 2U_m \frac{\tau}{T} \frac{\sin\left(\frac{\omega\tau}{2}\right)}{\frac{\omega\tau}{2}}$$

В качестве ортогонального базиса может использоваться и другая совокупность функций, например, функций Уолша.

### Параметры одиночного импульса.

Реальный скачок сигнала характеризуется конечной величиной времени нарастания  $t_H$  – это интервал времени, в течение которого

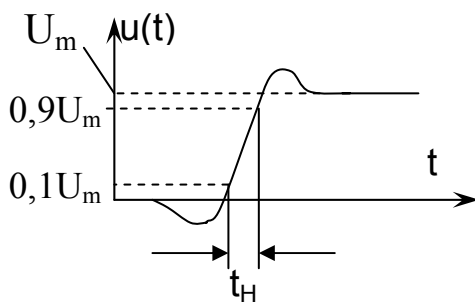


Рис.2.10

уровень сигнала возрастает от  $0,1U_m$  до  $0,9U_m$  (рис. 2.10).

Реальный прямоугольный импульс в общем случае имеет следующие участки (рис. 2.11): *A* – фронт, *B* – срез, *C* – вершина, *D* – выброс, *F* – хвост.

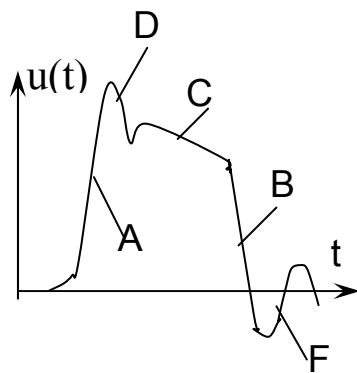


Рис. 2.11

Колебательные процессы вызываются паразитными емкостями индуктивностями и могут отсутствовать. Идеализированный импульс определяется следующими параметрами (рис. 2.12):

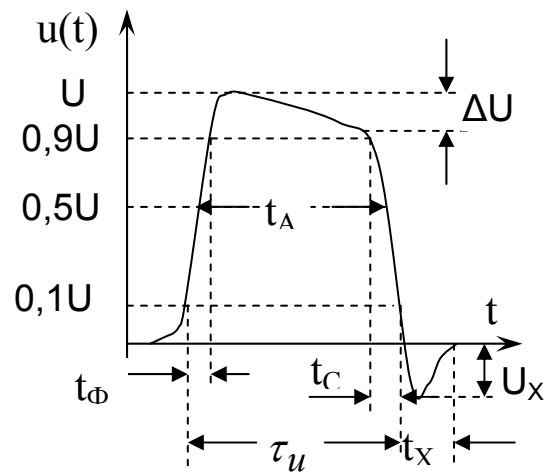


Рис.2.12

- 1) амплитуда импульса (наибольшее мгновенное значение импульса относительно начального уровня –  $U$ ;
- 2) длительность фронта, время изменения напряжения импульса между уровнями от  $0,1U_m$  до  $0,9U_m$  –  $t_\phi$ ;
- 3) длительность среза (определяется аналогично длительности фронта) –  $t_c$ ;
- 4) спад вершины импульса –  $\Delta U$ ;
- 5) активная длительность импульса по уровню  $0,5U$  –  $t_{ua}$ ;

- 6) длительность импульса по уровню  $0,1U_m - \tau_u$ ;
- 7) обратный выброс импульса (хвост) –  $U_x$ ;
- 8) длительность обратного выброса –  $t_x$ .

### 3. RC-цепь при импульсном воздействии

Простейшая RC-цепь состоит из последовательно соединенных элементов: резистора и конденсатора (рис. 3.1). В связи с инерционностью конденсатора процессы установления тока и напряжения в цепи проходят в течение некоторого временного интервала. Известно, что ток через емкость определяется скоростью изменения напряжения на ней:

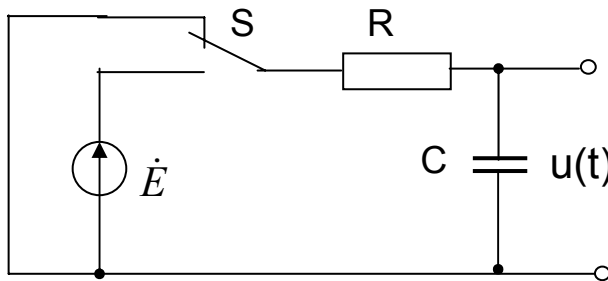


Рис. 3.1

$$i_C = C \frac{du}{dt}.$$

Следовательно, напряжение на емкости принципиально не может измениться скачком, т.е. при переключении сохраняет свое прежнее значение:

$$u(t_0 -) = u(t_0 +).$$

Основные свойства RC-цепи в режиме переключения:

- 1) Сразу после переключения цепи конденсатор следует рассматривать как короткозамкнутый элемент для протекающего через него тока.
- 2) Перепад напряжения передается свободно через конденсатор в режиме короткозамкнутого элемента.
- 3) Процесс передачи скачка напряжения не зависит от начального напряжения (заряда) на емкости; наличие начального напряжения может быть учтено включением соответствующего генератора ЭДС последовательно с незаряженным конденсатором.
- 4) После завершения переходного процесса переключения (в установившемся режиме) конденсатор представляет собой разрыв цепи при нулевом токе в ней.

Рассмотрим процесс воздействия скачка напряжения от генератора ЭДС на RC-цепь. Разграничим этот процесс на два этапа: 1) отключение генератора ЭДС от RC-цепи, что сопровождается разрядом конденсатора (свободный режим); 2) включение генератора ЭДС, что обеспечивает заряд конденсатора.

#### 3.1. Воздействие на RC-цепь скачка напряжения

### 3.1.1. Процесс разряда конденсатора

Исходное состояние схемы: напряжение на емкости  $u = E$ , ток в цепи отсутствует  $I = 0$ , генератор ЭДС подключен к цепи. Момент коммутации цепи  $t = 0$ , т.е. в этот момент генератор ЭДС отключается (рис. 3.2).

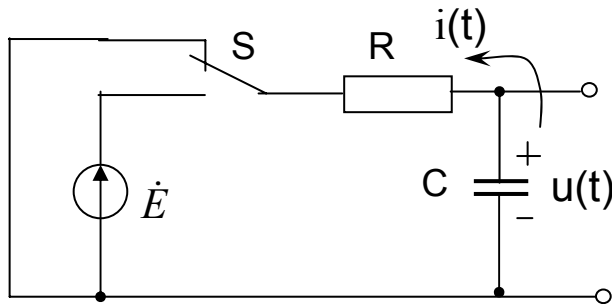


Рис. 3.2

Разряд емкости сопровождается появлением тока в цепи

$$i_C = C \frac{du}{dt}.$$

Сразу после коммутации напряжение на емкости сохраняется прежним  $U_0 = E$ , а ток в цепи

максимален  $I_0 = E/R$  (рис. 3.3).

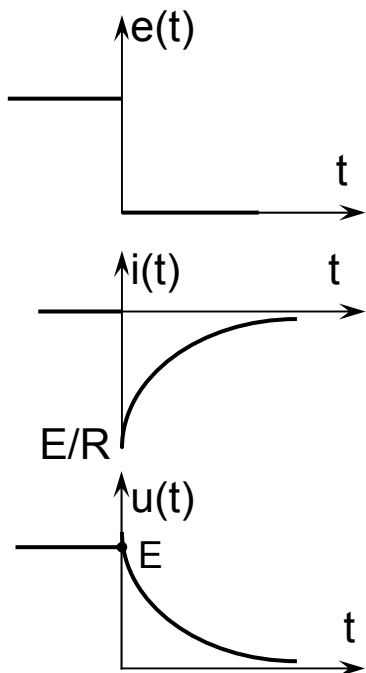


Рис. 3.3

Переходной процесс разряда емкости описывается следующим уравнением

$$C \frac{du}{dt} = -\frac{u}{R}, \quad \tau \frac{du}{dt} + u = 0, \quad \text{где } \tau = RC$$

(знак минус отражает тот факт, что напряжение на емкости с течением времени уменьшается), причем  $u(0) = E$ .

В результате решения уравнения получаем

$$u(t) = Ae^{p_1 t},$$

где  $p_1$  - решение характеристического уравнения

$$p\tau + 1 = 0, \quad \text{т.е. } p_1 = -\frac{1}{\tau},$$

следовательно,

$$u(t) = Ae^{-\frac{t}{\tau}}.$$

Подставив в решение начальное условие:  $t = 0, u = E$ , имеем  $A = E$ , т.е.

$$u(t) = Ee^{-\frac{t}{\tau}}.$$

### 3.1.2. Процесс заряда конденсатора



Исходное состояние схемы:

- напряжение на емкости  $U_0 = 0$ ;
- ток в цепи  $I = 0$ ;
- генератор ЭДС отключен;
- момент коммутации  $t = 0$ .

Состояние схемы сразу после коммутации:

- напряжение на емкости сохраняется  $U_0 = 0$ ;
- ток в цепи максимален, так как ЭДС  $E$  приложено только к резистору (емкость является короткозамкнутой) (рис. 3.4).

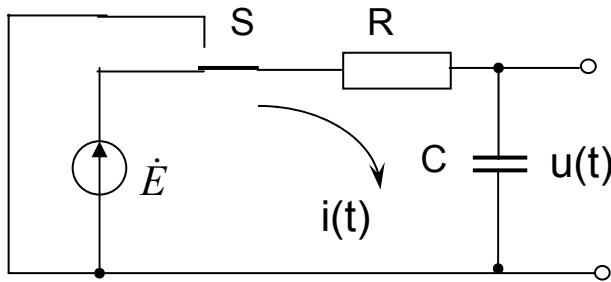


Рис. 3.4

В течение переходного процесса по мере заряда конденсатора ток в цепи уменьшается, а напряжение на емкости растет.

После завершения переходного процесса установившийся режим схемы:  $I = 0$ ,  $U = E$  (рис. 3.5).

Аналитически переходной процесс заряда описывается

дифференциальным уравнением, которое записывается на основании 2-го закона Кирхгофа

$$e(t) = u(t) + u_R(t), \quad \text{или} \quad e(t) = u(t) + i(t)R,$$

с учетом

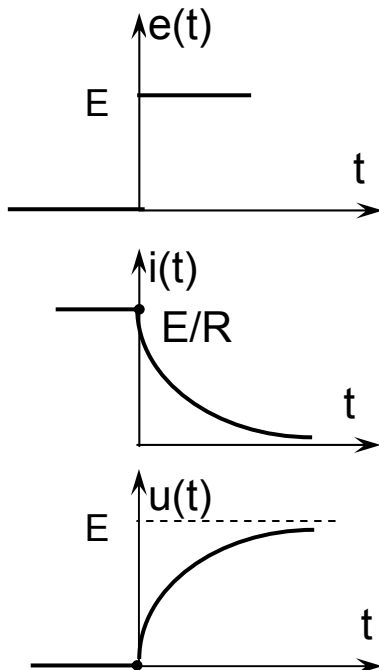


Рис. 3.5

$$i(t) = C \frac{du}{dt}$$

имеем

$$u(t) + \tau \frac{du(t)}{dt} = e(t), \quad \text{где } \tau = RC.$$

Решение уравнения состоит из свободной составляющей, которая определяется только внутренними параметрами цепи, и установившейся (вынужденной) составляющей:

$$u(t) = u_{св}(t) + u_{уcm}(t).$$

Свободный режим определяется при отсутствии внешнего воздействия  $e(t) = 0$ , т.е.

$$u(t) + \tau \frac{du(t)}{dt} = 0,$$

откуда

$$u(t) = u_{св}(t) = A e^{-\frac{t}{\tau}}.$$

Установившийся (вынужденный) режим соответствует статическому случаю:

$$t \rightarrow \infty, \quad \frac{du}{dt} = 0, \quad \text{поэтому} \quad u_{уст}(t) = E.$$

В целом переходной процесс состоит из двух составляющих

$$u(t) = E + Ae^{-\frac{t}{\tau}}.$$

Начальные условия схемы  $t = 0, u(0) = 0$  определяют из этого уравнения неизвестную константу, т.е.  $A = -E$ , откуда

$$u(t) = E \left( 1 - e^{-\frac{t}{\tau}} \right).$$

### 3.1.3. Особенности переходного процесса

Процесс протекает во времени неравномерно (нелинейно). Вначале после коммутации скорость изменения напряжения велика, а затем переходной процесс замедляется.

Скорость переходного процесса в начальный момент времени определяется временным параметром цепи:  $\tau$  – постоянной времени

$$u(t) = Ee^{-\frac{t}{\tau}}, \quad \left. \frac{du}{dt} \right|_{t=0} = -\frac{E}{\tau}.$$

За время, равное постоянной времени  $t = \tau$ , напряжение на емкости изменяется в  $e$  раз

$$u(\tau) = \frac{E}{e},$$

т.е. на 63% от начального значения (рис. 3.6).

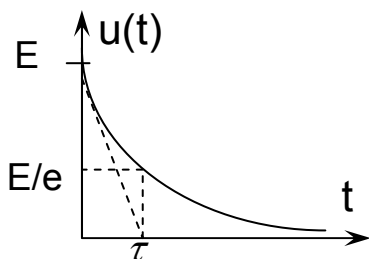


Рис. 3.6

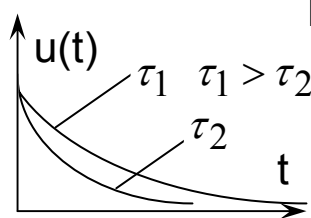


Рис. 3.7

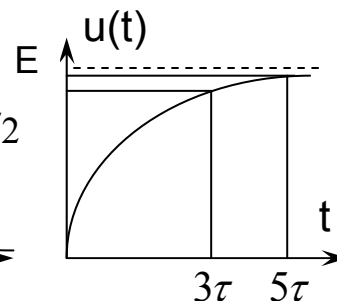


Рис. 3.8

Чем больше постоянная времени, тем медленнее протекает переходной процесс (рис. 3.7).

Длительность переходного процесса определяют в зависимости от уровня условного порога переходного напряжения:

А) десятикратное изменение напряжения

$$u(t_1) = E e^{-\frac{t_1}{\tau}} = \frac{E}{10} = 0,1E, \quad e^{\frac{t_1}{\tau}} = 10, \quad t_1 = \tau \ln 10, \quad t_1 = 2,3\tau.$$

Б) практическая длительность переходного процесса (рис. 3.8):

$$t_2 = 3\tau, \text{ при этом } u(t_2) = 0,95E;$$

$$t_3 = 5\tau, \text{ тогда } u(t_3) = 0,99E.$$

Постоянная времени не зависит от начального напряжения на конденсаторе (рис. 3.9).

Общий закон изменения напряжения при заряде конденсатора:

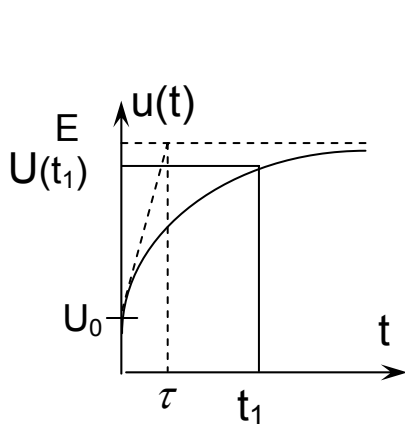


Рис. 3.9

$$u(t) = E + A e^{-\frac{t}{\tau}}.$$

Если при  $t=0$  начальное напряжение  $u(0) = U_0$ , то величина константы

$$U_0 = E + A, \quad A = U_0 - E.$$

Тогда заряд емкости при наличии начального напряжения описывается следующей формулой

$$u(t) = E + (U_0 - E) e^{-\frac{t}{\tau}}$$

$$u(t) = E - (E - U_0) e^{-\frac{t}{\tau}}.$$

Общая формула определения длительности переходного процесса по заданному пороговому уровню  $U(t_1)$  (см. рис. 3.9):

$$\frac{E - U(t_1)}{E - U_0} = e^{-\frac{t_1}{\tau}}, \quad t_1 = -\tau \ln \frac{E - U(t_1)}{E - U_0},$$

$$t_1 = \tau \ln \frac{E - U_0}{E - U(t_1)}.$$

Частные случаи расчета длительности переходного процесса следуют из этой общей формулы:

а) длительность заряда разряженного конденсатора:  $U_0 = 0$  (рис. 3.10)

$$t_1 = \tau \ln \frac{E}{E - U(t_1)};$$

б) длительность разряда конденсатора:  $U_{уст} = 0, \quad U_0 = E$  (рис. 3.11)

$$t_1 = \tau \ln \frac{0 - E}{0 - U(t_1)}, \quad t_1 = \tau \ln \frac{E}{U_1};$$

в) заряд конденсатора при наличии начального напряжения на конденсаторе:  $U_0$ , при  $U_{ycm} = E$  (рис.3.12)

$$t_1 = \tau \ln \frac{E - U_0}{E - U_1};$$

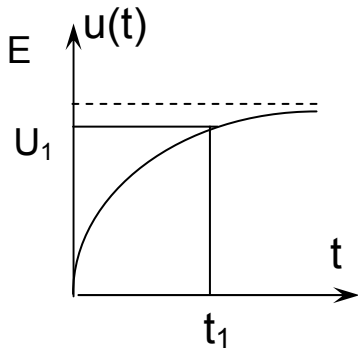


Рис. 3.10

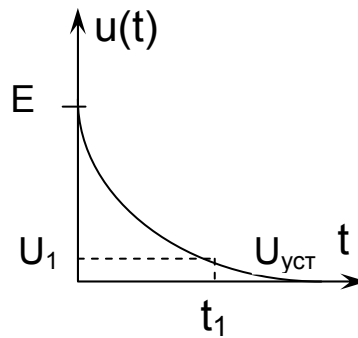


Рис. 3.11

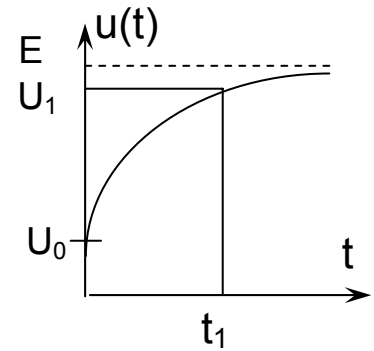


Рис. 3.12

г) заряд конденсатора при наличии напряжения противоположной полярности (рис. 3.13)

$$t_1 = \tau \ln \frac{E - (-U_0)}{E - U_1}; \quad t_1 = \tau \ln \frac{E + U_0}{E - U_1};$$

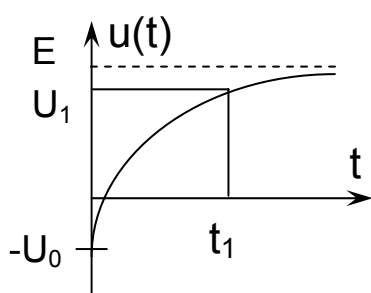


Рис. 3.13

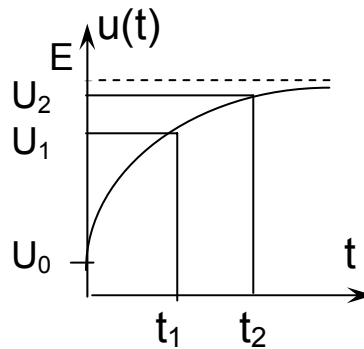


Рис. 3.14

Длительность переходного процесса между двумя уровнями напряжения (рис. 3.14)

$$t_1 = \tau \ln \frac{E - U_0}{E - U_1}, \quad t_2 = \tau \ln \frac{E - U_0}{E - U_2},$$

$$\Delta t = t_2 - t_1 = \tau \ln \frac{E - U_1}{E - U_2}.$$

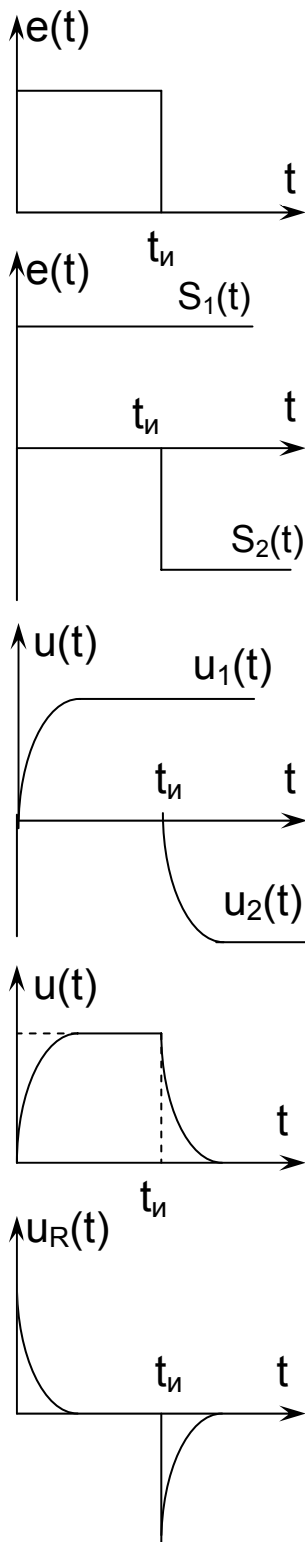


Рис. 3.15

Стандартные уровни напряжений соответствуют  $U_1 = 0,1E$ ,  $U_2 = 0,9E$ , тогда

$$\Delta t = \tau \ln \frac{E - 0,1E}{E - 0,9E} = \tau \ln \frac{0,9}{0,1} \approx 2,2\tau.$$

### 3.2. Прохождение прямоугольного импульса через RC-цепь

Процесс передачи прямоугольного импульса можно рассматривать как результат воздействия двух разнополярных скачков напряжения, сдвинутых во времени на величину длительности импульса  $t_u$ :

$$e(t) = S_1(t) - S_2(t) = E \cdot 1(t) - E \cdot 1(t - t_u),$$

где  $1(t)$  – единичный скачок.

Переходной процесс на емкости также есть результат воздействия двух скачков напряжения:

$$u(t) = E \left( 1 - e^{-\frac{t}{\tau}} \right) \cdot 1(t) - E \left( 1 - e^{-\frac{t-t_u}{\tau}} \right) \cdot 1(t - t_u).$$

Соответственно изменение напряжения на резисторе определяется законом изменения тока:

$$u_R(t) = i(t)R = E e^{-\frac{t}{\tau}} 1(t) - E e^{-\frac{t-t_u}{\tau}} 1(t - t_u).$$

Форма выходных импульсов зависит от соотношения постоянной времени цепи и длительности импульса. На эпюрах напряжений (рис. 3.15) приведен случай относительно малой постоянной времени  $\tau \ll t_u$ .

Второй предельный случай соответствует относительно большой постоянной времени  $\tau \gg t_u$  (рис. 3.16).

За время длительности импульса конденсатор заряжается до небольшой величины напряжения  $U_m$ . Заряд и разряд конденсатора происходит на начальном участке кривой переходного процесса, поэтому изменение напряжения практически линейно. Спад вершины импульса на резисторе возникает вследствие заряда конденсатора. Отрицательный хвост импульса формирует ток разряда конденсатора.

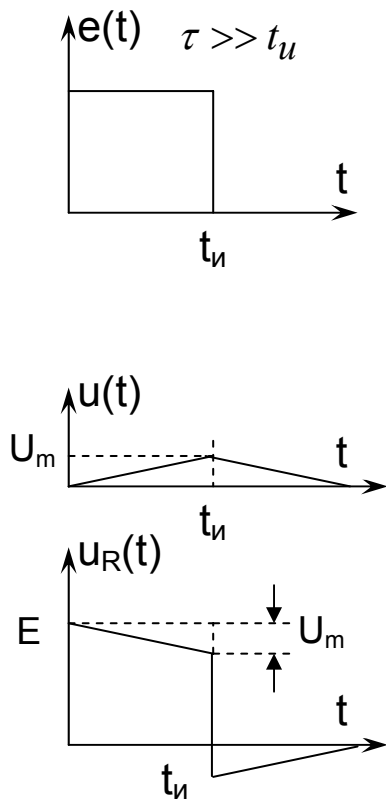


Рис. 3.16

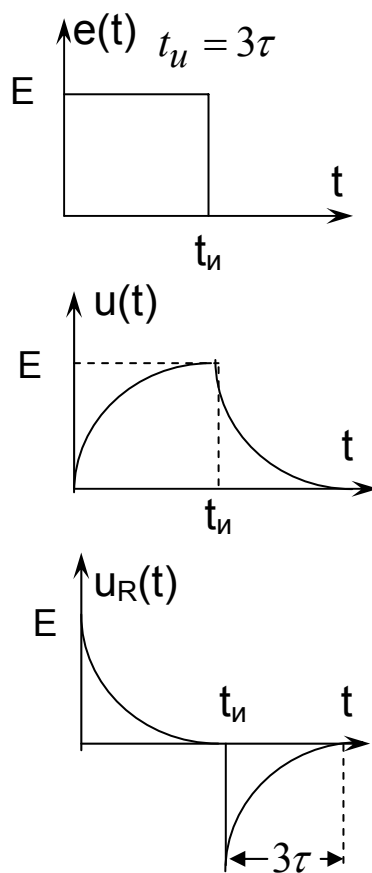


Рис. 3.17

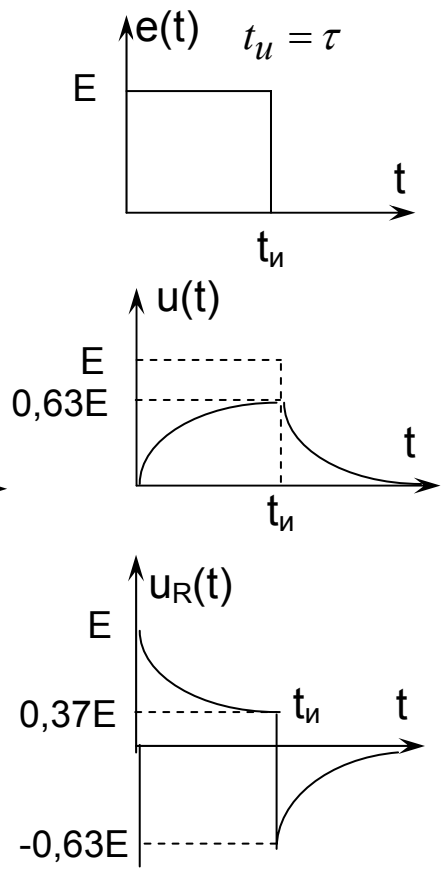


Рис. 3.18

Для неискаженной передачи импульса необходимо существенно увеличить постоянную времени в сравнении с длительностью импульса.

Граничный режим соответствует длительности импульса  $t_u = 3\tau$ , когда напряжение на емкости достигает 95% от установившегося значения, т.е.  $0,95E$  (рис. 3.17). Для сравнения на рис. 3.18 приведены эпюры напряжений при  $t_u = \tau$ .

*Замечание.* Особенности переходного процесса в RC-цепи, включенной в реальную схему. В реальной цепи следует учесть внутреннее сопротивление источника сигнала  $R_i$ , а также входную емкость устройства  $C_0$ , к которому подключена RC-цепь (рис.3.19).

Если пренебречь малой входной емкостью  $C_0$ , то наличие внутреннего сопротивления источника сигнала приводит к уменьшению амплитуды начального скачка напряжения на резисторе

$$U_{Rm} = E \frac{R}{R + R_i}.$$

Наличие  $R_i$  приводит к увеличению постоянной времени цепи  $\tau = C(R + R_i)$ , т.е. увеличивает ее инерционность.

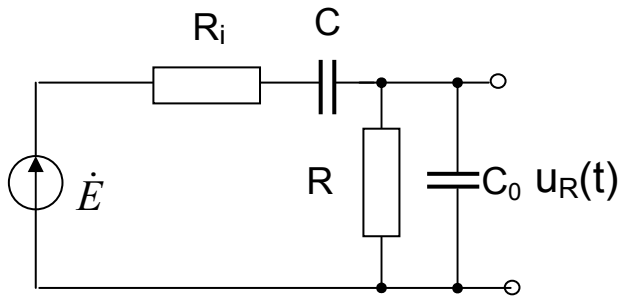


Рис. 3.19

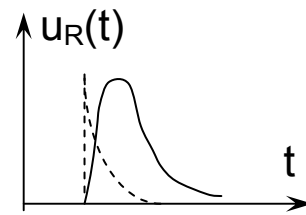


Рис. 3.20

Входная емкость  $C_0$  еще более уменьшает амплитуду выходного скачка вследствие действия емкостного делителя напряжения. При  $R_i = 0$  имеем

$$U_{Rm} \approx E \frac{C}{C + C_0}.$$

Емкость  $C_0$  увеличивает постоянную времени разряда, т.е. удлиняет задний фронт выходного импульса.

Наличие  $C_0$  и  $R_i$  приводит к появлению переднего фронта импульса, так как напряжение на  $C_0$  не может измениться скачком.

Форма выходного импульса в сравнении с реальной цепью приведена на рис. 3.20.

### 3.3. Воздействие на RC-цепь последовательности прямоугольных импульсов

Исследуемая схема приведена на рис. 3.21. В зависимости от соотношения постоянной времени и периода следования импульсов возможны два варианта: большой и малой постоянной времени.

При малой постоянной времени  $\tau \ll t_u$  ( $\tau < 0,05 \dots 0,1 t_u$ ) емкость успевает зарядиться за время длительности импульса и разрядиться в интервале между импульсами (рис. 3.22).

На резисторе выделяется последовательность коротких разнополярных импульсов. Поэтому такая цепь называется укорачивающей. Если зашунтировать резистор диодом, то импульсная последовательность будет униполярной.

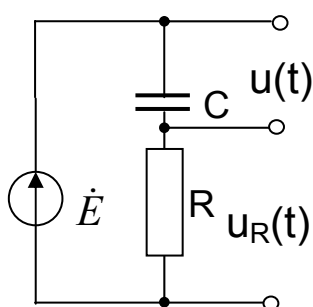


Рис. 3.21

При большой постоянной времени  $t_u \ll \tau < T$  ( $\tau \geq 10 \dots 20 t_u$ ) за время действия импульса емкость заряжается до небольшой величины, а в интервале между импульсами успевает разрядиться.

Импульсы, которые выделяются на резисторе, практически повторяют входные импульсы. Не-

большой спад вершины импульса и появление отрицательного хвоста связаны с небольшим зарядом и полным разрядом емкости. Такая цепь при резистивном выходе выполняет функцию разделительной, передаточной цепи (рис. 3.23).

Основная задача такой цепи – передача импульсов без искажений с минимальным допустимым спадом вершины импульса  $\delta = \Delta U/E \approx t_u/\tau$ .

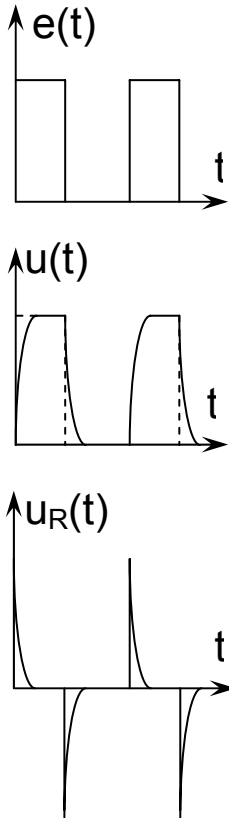


Рис. 3.22

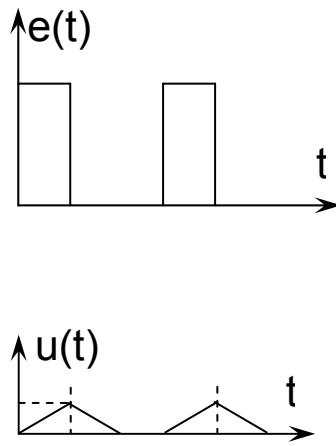


Рис. 3.23

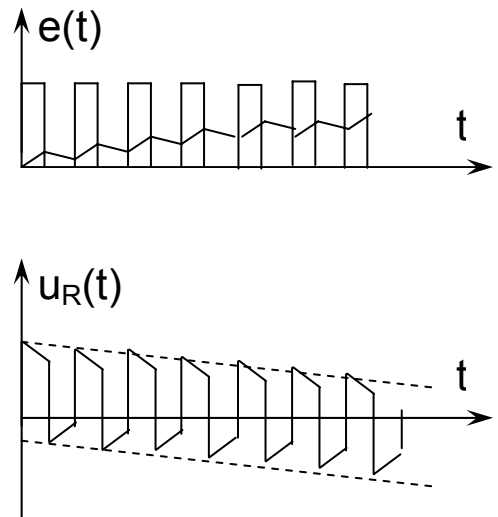


Рис. 3.24

Условие передачи импульсов без искажений:  $\delta \approx \frac{7t_u}{\tau}$ .

*Замечание.* Если  $\tau > T$ , то в интервале между импульсами емкость не успевает разряжаться. Среднее значение напряжения на емкости возрастает, что вызывает уменьшение среднего напряжения на резисторе. Через интервал времени  $\Delta t \approx 3\tau$  завершается переходной процесс заряда емкости. При этом в выходном сигнале на резисторе отсутствует постоянная составляющая (рис. 3.24).

### 3.4. Дифференцирующие и интегрирующие цепи

#### 3.4.1. Дифференцирующая цепь



Дифференцирующая цепь – это такая цепь, выходное напряжение которой пропорционально скорости изменения входного напряжения (крутизне входного напряжения)

$$u_R(t) = k \frac{de(t)}{dt}.$$

Например, результатом идеального дифференцирования трапецеидального импульса является пара разнополярных прямоугольных импульсов (рис. 3.25). Причем, длительность прямоугольных импульсов совпадает с длительностью переднего и заднего фронтов входного импульса.

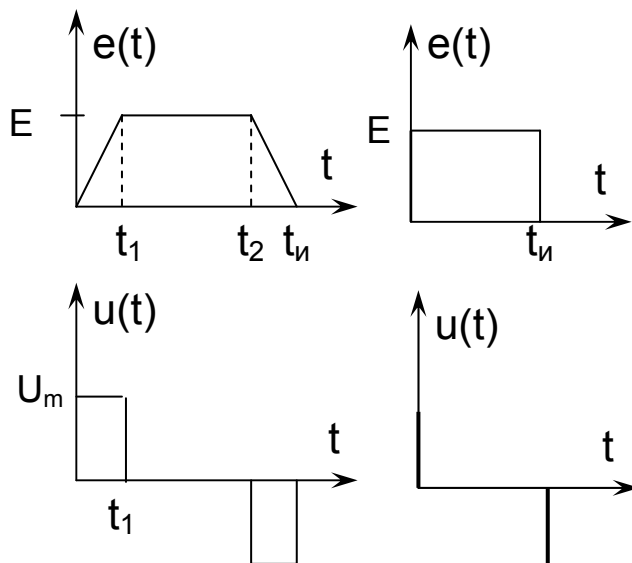


Рис. 3.25

Рис. 3.26

Действительно, на интервале переднего фронта  $0 < t \leq t_1$  имеем крутизну фронта

$$\frac{de(t)}{dt} = \frac{\Delta e}{\Delta t} = \frac{E}{t_1},$$

которая определяет амплитуду выходного прямоугольного импульса

$$U_m = \frac{k}{t_1} E,$$

где  $k$  – имеет размерность времени.

С уменьшением длительности фронта и спада трапецеидального импульса уменьшается длительность выходных прямоугольных импульсов, а их амплитуда увеличивается. Результатом дифференцирования прямоугольного импульса является пара  $\delta$  - импульсов (рис. 3.26).

Дифференцирующая цепь на основе RC – цепи (рис. 3.27) дифференцирует входной сигнал с некоторой погрешностью

$$u_R(t) = Ri(t) = RC \frac{du_C}{dt} = \tau \frac{d}{dt} [e(t) - u_R(t)],$$

$$u_R(t) = \tau \frac{de}{dt} - \tau \frac{du_R}{dt}.$$

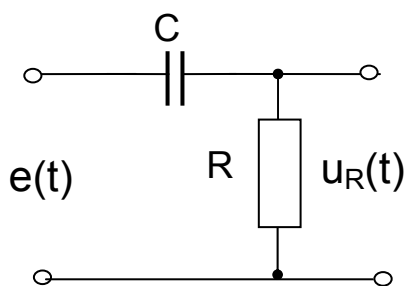


Рис. 3.27

Ошибку дифференцирования определяет второе слагаемое. Если соблюдается соотношение

$$\frac{du_R}{dt} \ll \frac{de(t)}{dt},$$

то реакция цепи приближается к идеальной

$$u_R(t) \approx \tau \frac{de(t)}{dt}.$$

Результаты реального дифференцирования трапецеидального и прямоугольного импульса приведены на рис. 3.28.

Идеальное дифференцирование осуществляется на участках импульса с постоянным или линейно-изменяющимся напряжением за исключением интервалов заряда и разряда конденсатора.

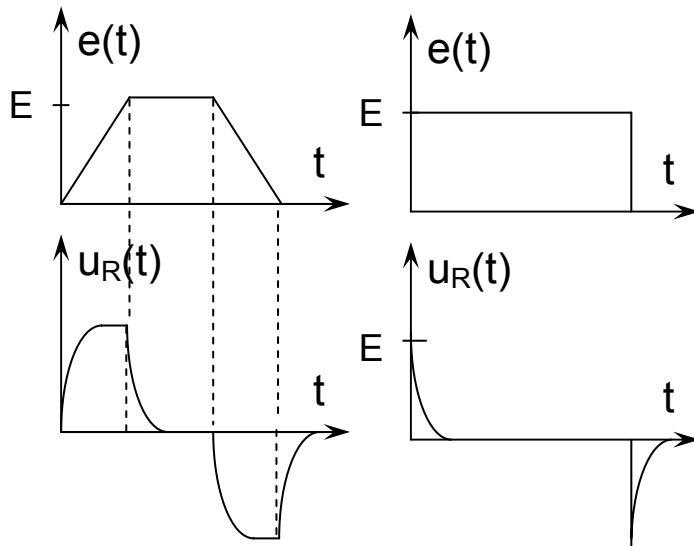


Рис. 3.28

Для повышения точности дифференцирования следует уменьшать постоянную времени  $\tau$ . Однако, при этом уменьшается амплитуда выходного сигнала. Кроме того, при малой величине сопротивления «нагружается» источник сигнала (вход схемы) при скачках напряжения. Удовлетворительное дифференцирование осуществляется при условии  $\tau \leq 0,1t_{\phi}$ .

Эффект дифференцирования прямоугольного импульса заключается в появлении экспоненциальных импульсов на переднем и заднем фронте исходного импульса.

Длительность укороченного импульса измеряют на уровне  $0,1U_m$ , что составляет  $t_u \approx 2,3\tau$ . На уровне  $0,5U_m$  длительность импульса соответствует  $t_u \approx 0,7\tau$  (активная длительность импульса).

Паразитное дифференцирование возникает при наличии паразитной емкостной связи, например, при подключении осциллографа (емкость контакта плюс входное сопротивление прибора).

### 3.4.2. Интегрирующая цепь

Интегрирующая цепь – это такая цепь, выходное напряжение которой пропорционально интегралу от входного

$$u(t) = k \int_0^t e(t) dt.$$

В результате идеального интегрирования прямоугольного импульса формируется линейно возрастающее напряжение

$$u(t) = k \int_0^t E dt = ktE, \quad t_u \geq t > 0,$$

где  $k$  - имеет размерность, обратную времени (рис. 3.29).

Простейшая интегрирующая цепь реализуется на основе RC-цепи, в которой выходное напряжение снимается с конденсатора (рис. 3.30).

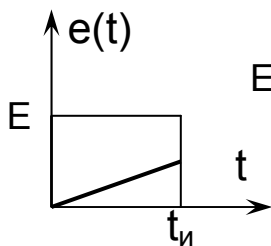


Рис. 3.29

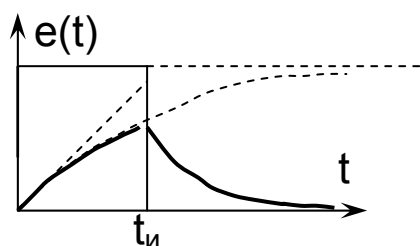


Рис. 3.31

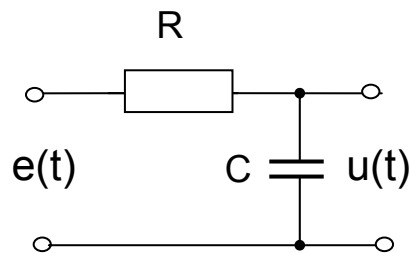


Рис. 3.30

Интегрирование в такой цепи осуществляется с некоторой погрешностью:

$$u(t) = \frac{1}{C} \int_0^t i(t) dt = \frac{1}{C} \int_0^t \frac{e(t) - u(t)}{R} dt,$$

$$u(t) = \frac{1}{\tau_0} \int_0^t e(t) dt - \frac{1}{\tau_0} \int_0^t u(t) dt.$$

Второе слагаемое является ошибкой интегрирования. Более точное интегрирование реализуется при условии  $u(t) \ll e(t)$ :

$$u(t) \approx \frac{1}{\tau_0} \int_0^t e(t) dt.$$

При интегрировании прямоугольного импульса выходной сигнал отличается от идеального линейно возрастающего сигнала (рис. 3.31)

$$u(t) = E \left( 1 - e^{-\frac{t}{\tau}} \right).$$

Начальный участок соответствует точному интегрированию. Наибольшая ошибка соответствует концу импульса. Поэтому для обеспечения более точного интегрирования следует увеличивать постоянную времени цепи  $\tau \gg t_u$ , чтобы работать на начальном участке кривой заряда. Это приводит, в свою очередь, к малой амплитуде выходного импульса.

После окончания импульса идеальный интегратор сохраняет уровень напряжения, а в реальном происходит экспоненциальный спад вследствие разряда емкости.

Ошибка интегрирования определяется из сравнения выходного сигнала идеального интегратора

$$u(t) = \frac{t}{\tau} E$$

и реального

$$u(t) = E \left( 1 - e^{-\frac{t}{\tau}} \right).$$

Раскладывая в ряд и ограничиваясь тремя членами разложения, имеем:

$$u(t) \approx E \left[ 1 - 1 + \frac{1}{\tau} t - \frac{1}{2} \left( \frac{t}{\tau} \right)^2 \right] = E \frac{t}{\tau} \left( 1 - \frac{t}{2\tau} \right).$$

Абсолютная погрешность интегрирования при  $t = t_u$

$$\delta = \frac{E}{2} \left( \frac{t_u}{\tau} \right)^2.$$

Относительная погрешность

$$\gamma = \frac{\delta}{E \frac{t_u}{\tau}} = \frac{t_u}{2\tau}.$$

Например, при  $\gamma = 0,01$  и  $t_u/\tau = 0,02$  имеем  $\tau = 50t_u$ . Если к интегрирующей цепи не предъявляется жестких требований, то постоянная времени  $\tau = (5...10)t_u$ .

### 3.5. Методы анализа импульсных процессов в линейных цепях

Анализ переходных процессов при передаче импульсных сигналов осуществляется с использованием следующих методов: классического (на основе дифференциальных уравнений), операторного (на основе преобразования Лапласа) и временного метода.

В классическом методе дифференциальные уравнения составляют относительно мгновенных токов и напряжений с использованием законов Кирхгофа. При определении констант интегрирования дополнительно используют начальные условия: значения напряжений на емкостях и токов в индуктивностях в момент коммутации.

Временной метод основан на временном представлении токов и напряжений с использованием временных характеристик цепи. Вре-

менными характеристиками являются: переходная характеристика  $h(t)$  и импульсная характеристика  $g(t)$ .

Переходная характеристика – это реакция цепи на единичный скачок  $\sigma(t) = 1(t)$ .

Импульсная характеристика представляет собой реакцию цепи на короткий импульс – дельта-функцию  $\delta(t)$  (рис. 3.32).

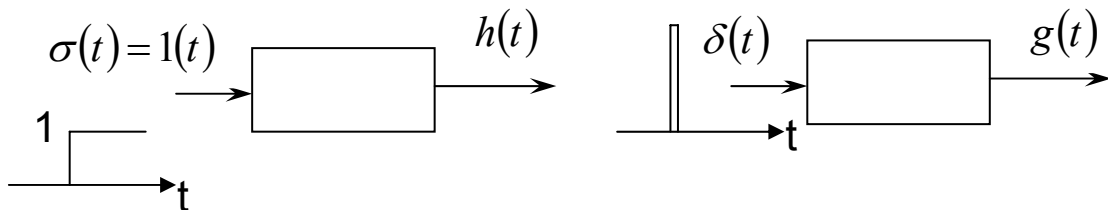


Рис. 3.32

Взаимосвязь входных сигналов

$$\delta(t) = \frac{d\sigma(t)}{dt}$$

определяет аналогичную взаимосвязь выходных сигналов, т.е. временных функций цепи

$$g(t) = \frac{dh(t)}{dt}.$$

Действительно, типовые входные сигналы являются результатом предельного перехода следующих сигналов (рис. 3.33):

$$\sigma(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} s(t),$$

$$\delta(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} s'(t).$$

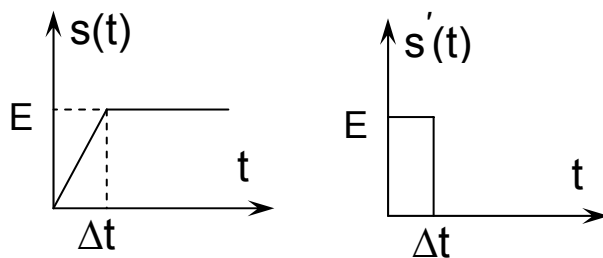


Рис. 3.33

Зная реакцию цепи на типовые сигналы, можно найти выходной сигнал для произвольного входного сигнала.

Искомый сигнал определяется с использованием интегралов Дюамеля

$$u(t) = \int_0^t s(\tau)g(t-\tau)d\tau,$$

$$u(t) = \int_0^t s(t-\tau)g(\tau)d\tau.$$

Импульсная характеристика  $g(t)$  задает «окно», которое скользит вдоль входного сигнала  $s(t)$  и воспроизводит последовательные мгновенные значения выходного сигнала. При этом численные значения сигнала определяются «площадью перекрытия сигнала и окна».

Следовательно, импульсная характеристика представляет собой «развертывающую» функцию или функцию «памяти» цепи.

Интегралы Дюамеля, выраженные через переходную характеристику, имеют следующий вид:

$$u(t) = S(0)h(t) + \int_0^t s'(\tau)h(t-\tau)d\tau$$

(При записи подинтегрального выражения учтена не единичная величина скачка  $s'(\tau)d\tau = ds(\tau)$ );

$$u(t) = h(0)s(t) + \int_0^t s(\tau)h'(t-\tau)d\tau;$$

$$u(t) = h(0)s(t) + \int_0^t s(t-\tau)h'(\tau)d\tau.$$

Запаздывающий аргумент может использоваться в любой функции: сигнала  $s(t-\tau)$  или переходной характеристики  $h(t-\tau)$ .

Операторный метод основан на операторном представлении входных сигналов с использованием операторной передаточной функции цепи  $K(p)$ .

Операторную форму входного сигнала определяют из таблиц преобразования Лапласа, например,

$$\sigma(t)1(t) \rightarrow \frac{1}{p}, \quad s(t) = at \rightarrow \frac{a}{p^2}.$$

Выходной сигнал определяют по следующей формуле:

$$U(p) = S(p)K(p).$$

Используя таблицы обратного преобразования Лапласа или типовую формулу Хевисайда, определяют временное представление выходного сигнала  $u(t)$ .

Замечание. Для определения характеристик цепи удобно исходить из определения операторной функции на основе операторной формы сопротивлений: индуктивного -  $Z_1(p) = pL$  и емкостного

$Z_2(p) = \frac{1}{pC}$ , например (рис. 3.34),

$$K(p) = \frac{U(p)}{S(p)} = \frac{Z_C(p)}{Z(p)} = \frac{1}{pC} \frac{1}{R + \frac{1}{pC}} = \frac{1}{1 + p\tau} = \frac{\alpha}{p + \alpha},$$

где  $\alpha = 1/\tau$ .

Для определения импульсной характеристики следует перейти во временную область

$$K(p) \rightarrow g(t), \quad \text{т.е.}$$

$$g(t) = \alpha e^{-\alpha t} = \frac{1}{\tau} e^{-\frac{t}{\tau}}.$$

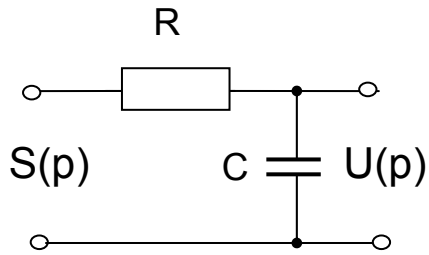


Рис. 3.34

Переходная характеристика определяется из следующей взаимосвязи

$$\frac{K(p)}{p} \rightarrow h(t),$$

откуда

$$h(t) = 1 - e^{-\frac{t}{\tau}}.$$

Эта функция совпадает с выходным сигналом RC-цепи при передаче скачка с единичной амплитудой.