

Лекция 11. Векторные нелинейные фильтры

Области применения (обработка многомерных сильно коррелированных данных):

- в многоканальных системах дистанционного зондирования;
- обработка цветных изображений и их последовательностей;
- биомедицинские приложения (многоканальные биомедицинские сигналы).

Достоинством использования векторной обработки данных является то, что многомерное представление сигнала позволяет учесть корреляцию между данными, и в то же время векторные нелинейные фильтры (в основном) сохраняют свойства, присущие их скалярным аналогам.

Сигнал (изображение) как вектор можно представить следующим образом:

$$\vec{x}_i = [x_{1i}, x_{2i}, \dots, x_{mi}]^T, \quad (1a)$$

$$\vec{x}_{ij} = [x_{1ij}, x_{2ij}, \dots, x_{mij}]^T, \quad (1b)$$

где x_{ki} и x_{kij} ($k=1 \dots m$) – k -я координата (компонента) векторов \vec{x}_i и \vec{x}_{ij} .

Выходной сигнал векторного нелинейного фильтра является векторным функциональным преобразованием \vec{F} входного вектора:

$$\vec{y}_i = \vec{F}(\vec{x}_i), \quad (2a)$$

$$\vec{y}_{ij} = \vec{F}(\vec{x}_{ij}), \quad (2b)$$

что не равнозначно применению функционального преобразования F отдельно к каждому компоненту вектора, поскольку в выходном сигнале векторного фильтра (2) учитывается корреляция между всеми m -компонентами входного сигнала.

Принцип векторной нелинейной фильтрации на основе порядковых статистик предусматривает расчет скалярных величин, являющихся суммарными расстояниями от каждого вектора до других векторов входной выборки, размер которой определяется скользящим окном фильтра. Для выборки N векторов: $[\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_N]$ рассчитывается N скалярных величин $[\bar{a}_1, \bar{a}_2, \dots, \bar{a}_N]$, определяемых суммой взаимных расстояний от i -го вектора до других векторов выборки:

$$\tilde{a}_i = \sum_{q=1}^N \|\bar{x}_i - \bar{x}_q\|, \quad (3)$$

где $\|\cdot\|$ - означает L_p - норму.

Таким образом, каждому i -му вектору размерности m из выборки входных векторов N ставится в соответствие скалярная величина \tilde{a}_i , являющаяся обобщенным расстоянием от i -го вектора до других векторов. Рассчитываемые расстояния характеризуют меру похожести данного вектора другим векторам выборки. Чем выше значение суммарного расстояния \tilde{a}_i , тем больше различие i -го вектора от других векторов, тем дальше от центра распределения находится i -й вектор \bar{x}_i .

Рассчитываемые суммы расстояний \tilde{a}_i упорядочиваются в порядке возрастания их значений:

$$[\bar{a}_1, \bar{a}_2, \dots, \bar{a}_N] \Rightarrow [\bar{a}_{(1)}, \bar{a}_{(2)}, \dots, \bar{a}_{(N)}], \quad (4)$$

где $\bar{a}_{(1)} < \bar{a}_{(2)} < \dots < \bar{a}_{(N)}$

Затем в соответствии с сортировкой значений суммарного расстояния \tilde{a}_i каждого вектора ранжируются (упорядочиваются) вектора:

$$[\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_N] \Rightarrow [\bar{x}_{(1)}, \bar{x}_{(2)}, \dots, \bar{x}_{(N)}] \quad (5)$$

Над упорядоченным таким образом рядом векторов в зависимости от типа нелинейного фильтра применяют соответствующие операции. Например, взятие медианы – выбор вектора, имеющего минимальное значение суммарного расстояния до других векторов выборки. Векторная медиана из выборки m -мерных векторов $\bar{X} = \{\bar{x}_q; q = 1, \dots, N\}$ определяется как:

$$\bar{y}_{ВМФ} = \arg \min_{\bar{x}_i \in \bar{X}} \sum_q \|\bar{x}_q - \bar{x}_i\|. \quad (6)$$

Соответственно, выходной сигнал векторного медианного фильтра (ВМФ) определяется путем выбора одного вектора из выборки входных векторов, имеющего наименьшую скалярную величину суммы расстояний до других векторов в пределах окна фильтра.

Отметим, что в отличие от скалярного случая, для отсортированной выборки векторных данных векторная медиана является первым (по порядку) элементом.

Другая методика ранжирования векторов выборки заключается в нахождении векторной медианы и расчете расстояний от каждого вектора выборки до вектора, соответствующего медиане, т.е. имеющего минимальное значение суммы расстояний до других векторов. Вектора ранжируются в соответствии с упорядочением ряда значений рассчитанных расстояний. Методика сортировки оговаривается.

Возможны другие операции с векторными данными - взвешенное усреднение векторных порядковых статистик, исключение из выборки порядковых статистик с наибольшими рангами и последующее усреднение векторов и др.

Для векторного α -урезанного фильтра выходной сигнал определяется выражением

$$X^{f\alpha} = \left(\sum_{l=1}^{N_B(1-\alpha_B)} X_{(l)} \right) / (N_B(1-\alpha_B)) \quad (7)$$

Сигнал на выходе векторного медианного фильтра является оценкой по максимуму правдоподобия с экспоненциальным законом распределения. Векторный медианный фильтр характеризуется высокой степенью устранения выбросов и высокой эффективностью подавления помех, имеющих распределения с «тяжелыми хвостами» (экспоненциальное или засоренное импульсными помехами и значениями из выборок с другими законами распределения).

Свойства векторного медианного фильтра, векторного α -урезанного фильтра и других векторных фильтров на основе порядковых статистик определяются размером скользящего окна и видом используемой нормы.

Существуют различные виды норм для определения расстояния между двумя векторами. Обобщенная формула для вычисления L_p -нормы:

$$d_p(i, j) = \left(\sum_{k=1}^m |x_{ik} - x_{jk}|^p \right)^{\frac{1}{p}}, \quad (8)$$

где m -размерность векторного пространства, x_{ik} – k -я координата вектора.

Наиболее часто используют три основных вида норм:

- L_1 -норма ($p=1$): $d_1(i, j) = \sum_{k=1}^m |x_{ik} - x_{jk}|$,
- L_2 -норма ($p=2$) – Евклидово расстояние, $d_2(i, j) = \sqrt{\sum_{k=1}^m |x_{ik} - x_{jk}|^2}$
- L_∞ -норма ($p=\infty$): $d_\infty(i, j) = \max\{|x_{i1} - x_{j1}|, |x_{i2} - x_{j2}|, \dots, |x_{im} - x_{jm}|\}$

В рассчитываемой по формуле (3) сумме расстояний принимается во внимание различие между векторами по абсолютной величине (длине векторов), при этом не учитывается направление векторов в m -мерном пространстве.

Другой класс векторных нелинейных фильтров – векторные направленные (directional) фильтры (ВНФ). В качестве критерия ранжирования векторов в пределах окна фильтра используется угловая мера подобия i -го вектора другим векторам, определяющая различие между ориентацией векторов в m -мерном пространстве.

Сигнал на выходе ВНФ определяется как:

$$\bar{y}_{ВНФ} = \arg \min_{\bar{x}_i \in \bar{X}} \sum_j A(\bar{x}_i, \bar{x}_j), \quad (9)$$

где $A(\bar{x}_i, \bar{x}_j) = \arccos \left(\frac{\bar{x}_i \bar{x}_j^T}{|\bar{x}_i| \cdot |\bar{x}_j|} \right)$ – угол между двумя векторами.

Для данного типа векторных нелинейных фильтров мерой расстояния вектора до других векторов выборки является угол между векторами. Сумма «угловых» расстояний от исходного вектора до других векторов выборки определяется как:

$$a_i = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \theta(\bar{x}_i, \bar{x}_j), \quad (10)$$

где $\theta(\bar{x}_i, \bar{x}_j) = \arccos \left(\frac{\langle \bar{x}_i, \bar{x}_j \rangle}{\sqrt{\|\bar{x}_i\|^2 \|\bar{x}_j\|^2}} \right)$ – угол между векторами \bar{x}_i , \bar{x}_j ,

$$0 \leq \theta(\bar{x}_i, \bar{x}_j) \leq \pi$$

В соответствии с отсортированной выборкой «угловых» расстояний: $\tilde{\alpha}_{(1)} \leq \tilde{\alpha}_{(2)} \leq \dots \leq \tilde{\alpha}_{(N)}$ ранжируются вектора: $[\bar{x}_{(1)}, \bar{x}_{(2)}, \bar{x}_{(3)}, \dots, \bar{x}_{(N)}]$. «Подобные» вектора, имеющие наименьшие значения суммарных угловых расстояний до других векторов выборки, имеют практически параллельную ориентацию в m -мерном пространстве, а вектора с большими значениями угловых расстояний $\tilde{\alpha}_i$ имеют различное направление.

Данные нелинейные фильтры применяются для обработки цветных изображений и других векторных данных, когда основной задачей является сохранение цвета или направления векторов (фазовой информации).

Выше уже упоминались векторные аналоги скалярных двумерных фильтров. Эти аналогии весьма условные, что связано с особенностями сортировки векторных данных и выполнения операций урезания, выбора соседей, окрестностей и т.д.. Тем не менее, общие свойства векторных аналогов - эффективность подавления помех, робастность, способность сохранять границы и детали - остаются сходными со скалярными фильтрами.

В качестве приемлемых скалярных ПШФ хорошо зарекомендовали себя α -урезанные фильтры, хорошее сохранение деталей и малоразмерных объектов обеспечивается векторным сигма-фильтром.

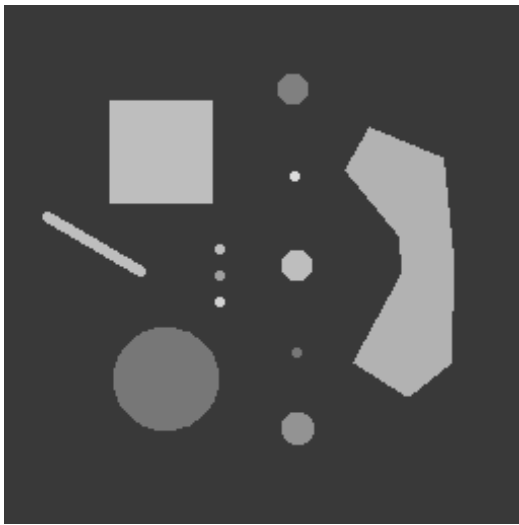
При расчете расстояний или выходных сигналов векторных фильтров необходимо принимать во внимание статистические характеристики помех в компонентных сигналах или изображениях.

Эффективность векторных методов фильтрации выше, чем покомпонентная обработка данных, если сигнальные составляющие в компонентах характеризуются высокой степенью коррелированности.

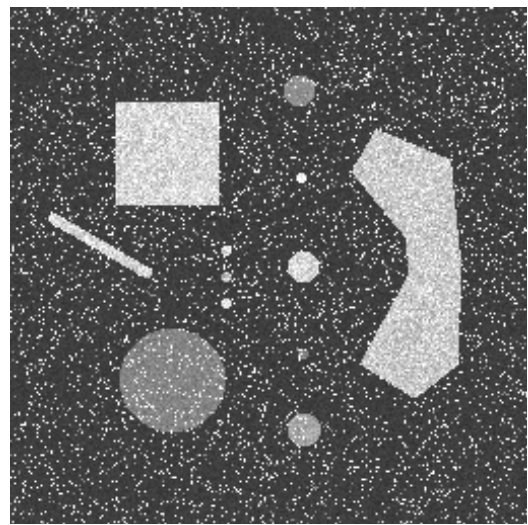
Векторный адаптивный LQ-фильтр

$$X^f = \begin{cases} X^{fa} & \text{при } Q_V \geq Q_{thr} \\ X^{fp} & \text{при } Q_V < Q_{thr} \end{cases},$$

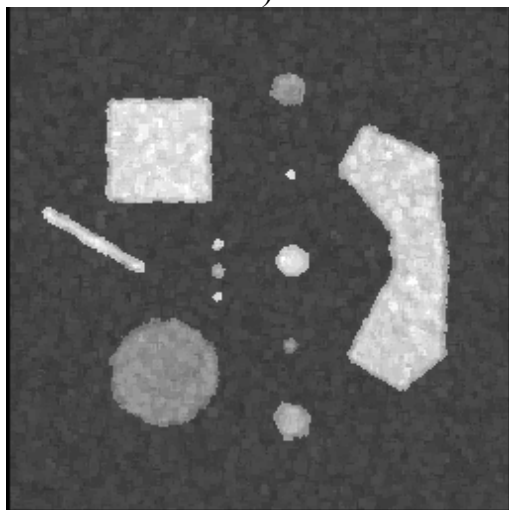
где X^{fa} и X^{fp} - выходные сигналы векторных фильтров, соответственно используемых для локально-активных и локально-пассивных участков многоканальных изображений, Q_{thr} - порог, а в качестве ПЛА используется предложенный векторный вариант квазиразмаха Q_V или его модификации в зависимости от вида флуктуационных помех.



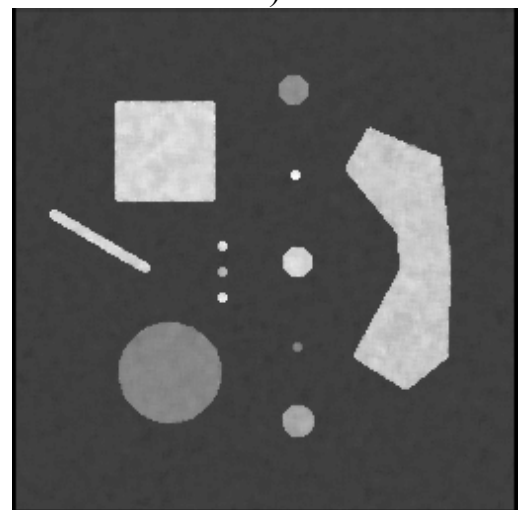
а)



б)



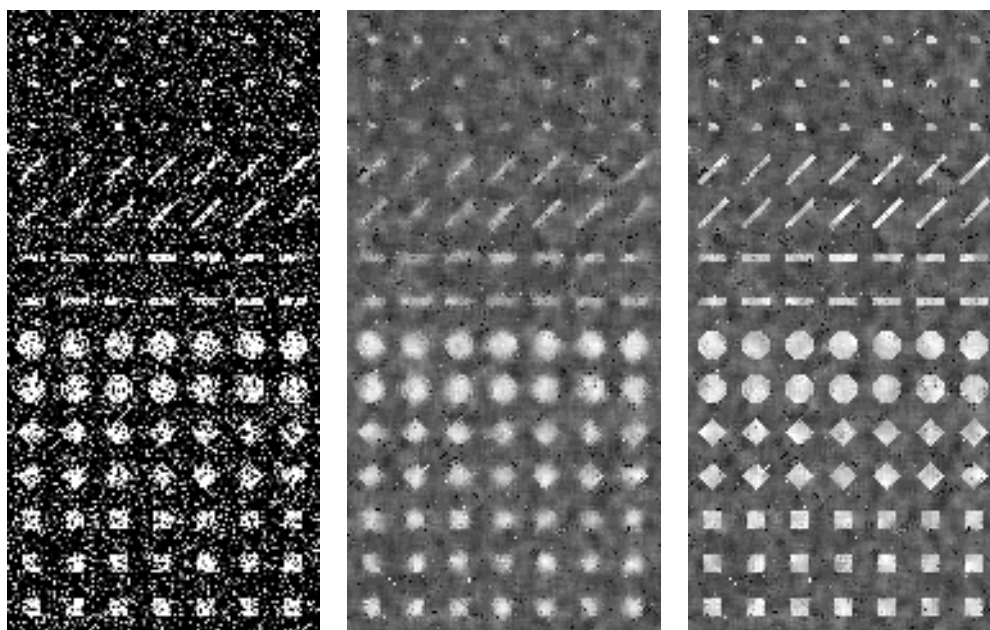
в)



г)

Результаты обработки тестового (а) изображения, искаженного помехами смешанного вида (б), ВМФ (5x5, норма L_2^2) (в) и предложенным адаптивным фильтром (ВАУФ+ВМФ)

Векторный модифицированный сигма-фильтр



а)

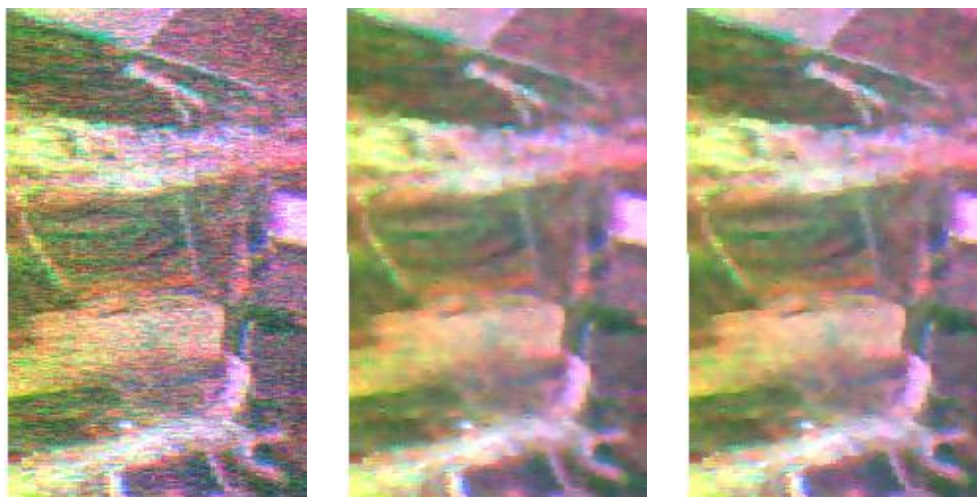
б)

в)

Фрагмент компонентного изображения с малыми контрастами: а)

зашумленное изображение; б) изображение на выходе МСФ;

в) компонентное изображение на выходе ВМСФ



а)

б)

в)

Трехканальное РБО изображение в RGB-представлении (R-длина волны 3 см, поляризация gg ; G - длина волны 8 мм, поляризация vw ; B- длина волны 8 мм, поляризация gg): а) исходное изображение; б) изображение на выходе МСФ; в) изображение на выходе ВМСФ

Достоинство: сохранение границ и деталей с малыми контрастами благодаря использованию межкомпонентной корреляции РЛИ.