

Лекция 6. Особенности выходных сигналов НФ.

Обобщение результатов анализа

Динамические ошибки

$$\Delta_D^\alpha \approx 0.65 \Delta_D^1$$
$$\Delta_D^W \approx 0.9 \Delta_D^1$$

где Δ_D^α , Δ_D^W , и Δ_D^1 - соответственно динамические ошибки выходных сигналов α -урезанного фильтра, фильтра Вилкоксона и усредняющего фильтра (при одинаковом N). Для МФ сложно получить такие обобщающие формулы в связи с тем, что его свойства являются очень нелинейными.

Подавление помех для сигналов постоянного уровня и для линейно-изменяющихся сигналов при Гауссовых помехах

Для обычного усредняющего фильтра с размером скользящего окна N при обработке аналитически описываемого сигнала, искаженного гауссовым шумом с нулевым МО и постоянной дисперсией дисперсия остаточных флуктуаций σ_r^2 может быть определена аналитически. Например, если шум некоррелированный (белый), то имеем $\sigma_{rl}^2 \approx \sigma_a^2/N$.

При этом эффективность подавления таких помех не зависит от того, что представляет собой сигнал, поскольку выполняется условие линейности $F(x(i)+n(i)) = F(x(i)) + F(n(i))$. То есть, искажения сигнала и подавление шума при фильтрации можно рассматривать отдельно, что существенно упрощает анализ свойств линейных фильтров.

Для нелинейных фильтров с заданным N соотношение σ_r^2 / σ_a^2 изменяется в зависимости от отношения $\Delta S / \sigma_a$ где $\Delta S = |S(i+1) - S(i)|$ (для линейно-изменяющихся сигналов).

Значения остаточных дисперсий σ_r^2 для разных фильтров

Тип фильтра	$\Delta S / \sigma_a$	Размер скользящего окна N , $\sigma_a^2 = 10$			
		5	7	9	11
Медианный	0,18	2,94	2,21	1,80	1,54
	0,55	3,53	3,07	2,90	2,81
	1,8	7,44	7,44	7,43	7,43
Вилкоксона	0,18	2,17	1,57	1,22	1,00
	0,55	2,25	1,68	1,29	1,06
	1,8	2,53	1,86	1,45	1,19
Ходжеса-Лемана	0,18	2,17	1,54	1,21	0,99
	0,55	2,24	1,65	1,28	1,07
	1,8	2,54	2,02	1,48	1,30
α -урезанный	0,18	2,30	1,80	1,32	1,16
	0,55	2,45	2,12	1,53	1,48
	1,8	3,04	3,02	1,89	1,90
Медианный гибридный	0,18	2,96	2,52	2,47	2,67
	0,55	4,38	5,38	6,70	7,86
	1,8	9,53	9,94	9,99	9,99

По мере увеличения соотношения $\Delta S / \sigma_a$ эффективность подавления помех ухудшается для всех рассмотренных нелинейных фильтров, но в различной степени.

Для фильтров Вилкоксона, Ходжеса-Лемана и α -урезанного фильтра с $\alpha=0,22$ при увеличении соотношения $\Delta S/\sigma_a$ эффективность ухудшается медленно и не очень значительно. Увеличение N приводит к повышению степени подавления помех.

Для фильтров Вилкоксона, Ходжеса-Лемана и α -урезанного фильтра с $\alpha=0,22$ были получены следующие приближенные выражения, пригодные для инженерных расчетов

$$\sigma_W^2 \approx \sigma_{H-L}^2 \approx 1.2\sigma_a^2/N = 1.2 \sigma_{rl}^2$$
$$\sigma_\alpha^2 \approx 1.4\sigma_a^2/N = 1.4 \sigma_{rl}^2$$

Численные эксперименты показали, что полученные выражения примерно справедливы и для других типов фрагментов с достаточно гладким поведением сигнальной составляющей.

Для МФ и КИХ-гибридного медианного фильтров при увеличении соотношения $\Delta S/\sigma_a$ эффективность ухудшается быстро и существенно. Увеличение N не приводит к заметному повышению степени подавления помех, особенно при больших $\Delta S/\sigma_a$.

При больших $\Delta S/\sigma_a$ последовательность (сигнал) становится стабильной точкой (root signal) МФ, вследствие чего МФ практически не изменяет значения исходной последовательности.

Аналогичные эффекты имеют место и для КИХ-гибридного медианного фильтра. Обобщенные аналитические выражения для этих фильтров получить невозможно. Еще сложнее ситуация с мириадным фильтром при малых (меньших σ_a) значениях настроенного параметра k .

Особенности поведения выходных сигналов нелинейных фильтров в окрестности отсчетов, искаженных импульсными помехами

Рассматриваемая модель дискретизированного сигнала

$$U(t_i) = \begin{cases} S(t_i) + n_a(t_i), & \text{с вероятностью } 1 - P_{imp} \\ S(t_i) + A_i(t_i), & \text{с вероятностью } P_{imp} \end{cases}, \quad (1)$$

где $S(t_i)$ истинное значение сигнала в i -м отсчете;

n_a - Гауссовский шум с нулевым МО и дисперсией σ^2 ;

A_i - амплитуда импульсной помехи, искажающей i -й отсчет с вероятностью P_{imp} ($|A_i| \gg 3\sigma$).

Рассмотрим линейно-изменяющийся сигнал $S(t_i) = k_0(t_i - t_0)$, где k_0 и t_0 - константы, $\Delta t = t_i - t_{i-1}$ - временная дискретность.

Предположим, что амплитуда импульса велика и выполняется условие ($|A_i| > 3\sigma + k_0\Delta t(N-1)/2$), т.е., если выброс присутствует в скользящем окне с размером N , то значение в отсчете, искаженном выбросом, является либо наибольшим, либо наименьшим в выборке данных для данного положения скользящего окна.

Усредняя выходные значения для рассматриваемого фильтра, можно оценить смещенность выходного сигнала как функцию индекса i

$$\Delta D = E\{U^f(t_i) - S(t_i)\}$$

где E - усреднение по ансамблю реализаций и $U^f(t_i)$ - выход фильтра.

Можно также рассчитать дисперсию остаточных флуктуаций в окрестности отсчета, искаженного выбросом.

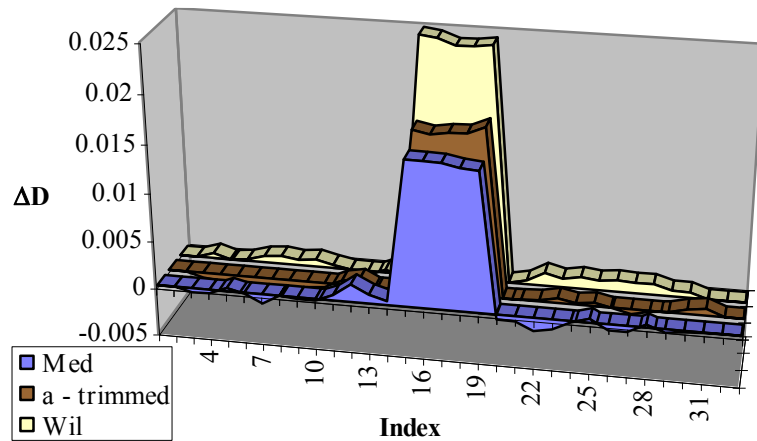


Рис. 15,а. Динамическая ошибка для разных типов фильтров для $\Delta S/\sigma_a=0$; $N=5$, $\sigma_a^2=0,003$ (сигнал постоянного уровня), импульсная помеха в 17-м отсчете, $A_i>0$.

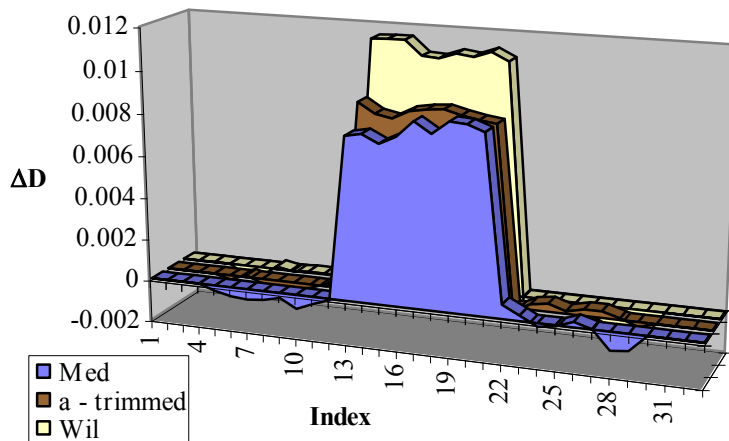
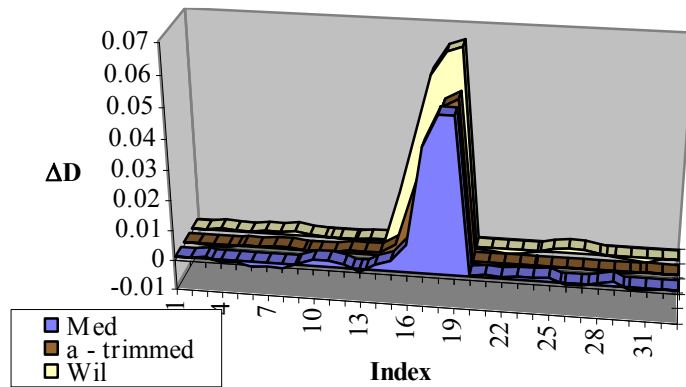


Рис. 15,б. Динамическая ошибка для разных типов фильтров для $\Delta S/\sigma_a=0$; $N=9$ (сигнал постоянного уровня).

Следствием присутствия импульсной помехи в пределах скользящего окна фильтра, обладающего робастными свойствами, является наличие смещенности выходного сигнала для всех отсчетов сигнала, для которых скользящее окно "захватывает" импульсную помеху. Знак смещенности совпадает со знаком импульсной помехи.

Величина смещенности зависит от типа фильтра (его робастных свойств), размера скользящего окна и от σ_a аддитивных помех. Чем больше степень робастности (ϵ), тем меньше смещенность. Поэтому она наименьшая для МФ (среди рассмотренных фильтров). Смещенность уменьшается при увеличении N и возрастает при увеличении σ_a , порядок смещенности - $(1,5...2,5)\sigma_a/N$.



a)

Рис. 16,а Динамическая ошибка для разных типов фильтров для $\Delta S/\sigma_a=1$; $N=5$; $\sigma_a^2=0,003$ (линейно-возрастающий сигнал), импульсная помеха в 17-м отсчете, $A_i>0$.

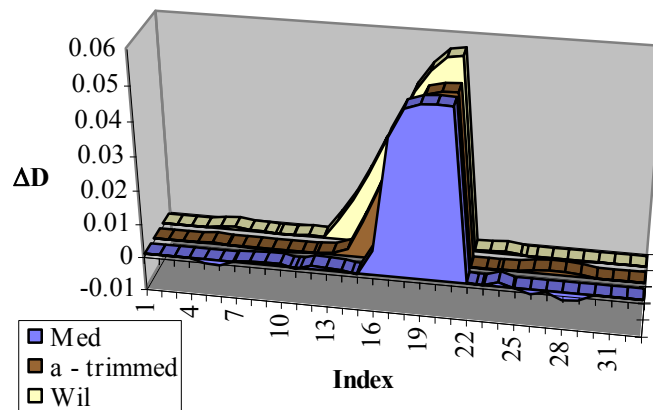


Рис. 16,б. Динамическая ошибка для разных типов фильтров для $\Delta S/\sigma_a=1$; $N=9$; (линейно-возрастающий сигнал), импульсная помеха в 17-м отсчете, $A_i>0$.

Следствием присутствия импульсной помехи в пределах скользящего окна нелинейного фильтра также является наличие смещенности выходного сигнала для отсчетов сигнала. Знак смещенности совпадает со знаком импульсной помехи, область наибольших значений смещенности зависит от знака ΔS , сама смещенность не является одинаковой для всех отсчетов и максимальная смещенность примерно равна ΔS .

Величина смещенности зависит от типа фильтра (его робастных свойств), размера скользящего окна и от ΔS . При увеличении ε ширина области ненулевой смещенности уменьшается, она наименьшая для МФ (среди рассмотренных фильтров). Ширина области смещенности возрастает при увеличении N .

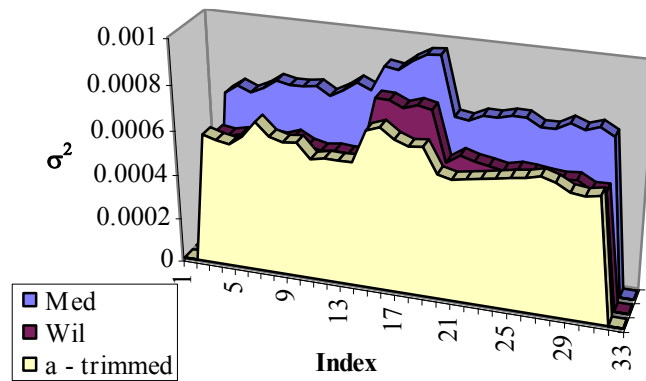


Рис. 17. Дисперсия на выходе различных фильтров при $\Delta S/\sigma_a=0$; $N=5$, $\sigma_a^2=0,003$ (сигнал постоянного уровня), импульсная помеха в 17-м отсчете.

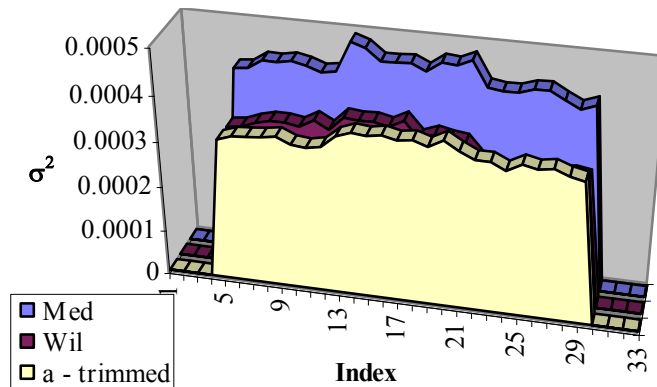


Рис. 18. Дисперсия на выходе различных фильтров при $\Delta S/\sigma_a=0$; $N=9$, (сигнал постоянного уровня), импульсная помеха в 17-м отсчете.

При присутствии импульсной помехи в пределах скользящего окна нелинейного фильтра возрастает и дисперсия остаточных флуктуаций в окрестности отсчетов, искаженных импульсной помехой.

При увеличении размера скользящего окна проявление этого эффекта уменьшается. Наибольшие остаточные флуктуации имеют место для МФ (среди рассматриваемых).

Аналогичные эффекты и зависимости имеют место и для линейно-изменяющихся сигналов. Но в этом случае МФ по эффективности подавления помех все более явно проигрывает фильтру Вилкоксона и α -урезанному фильтру по мере увеличения $\Delta S/\sigma_a$ (см. рис. 19).

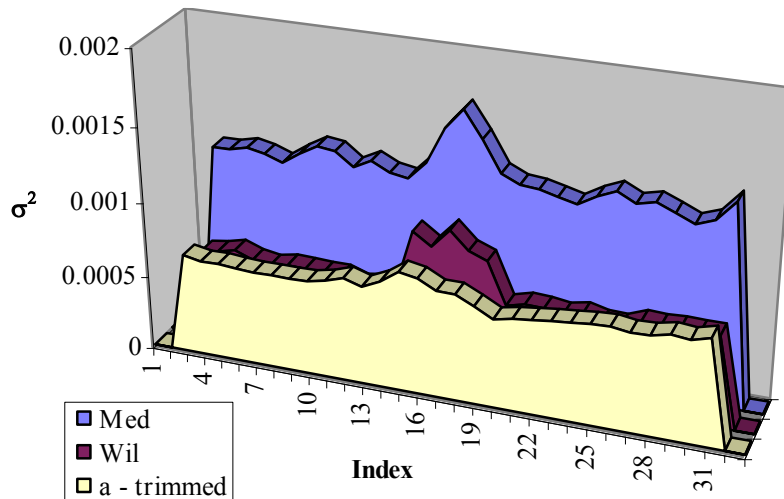


Рис. 19. Дисперсия на выходе различных фильтров при $\Delta S/\sigma_a=1$; $N=5$ (для линейно-изменяющегося сигнала).

Предварительные выводы

1. Нелинейные фильтры существенно отличаются между собой по своим динамическим свойствам, эффективности подавления помех, способности устранять импульсные помехи (в минимальной степени реагировать на их присутствие);
2. Эти характеристики также существенно зависят не только от типа фильтра, но и от размера скользящего окна;
3. Достаточно сложно выбрать соответствующий нелинейный фильтр без априорной информации о свойствах сигнала и помех или без их локального оценивания.

Пример эффективности фильтрации для простого тестового сигнала

$$S(t_i) = h_0 + \text{arctg}(\gamma t_i)$$

Где γ и i_0 - параметры, $t_i = (i - i_0)\Delta t$ - время в i -й момент; Δt - временная дискретность ($|\gamma t_i| = \gamma t_i \approx 2 \dots 3$).

Table 1: Значения среднеквадратической ошибки на выходе фильтров

σ_a^2	P_i	Типы комп. Фильтров	χ_5 $\times 10^{-3}$	χ_9 $\times 10^{-3}$	χ_{13} $\times 10^{-3}$	χ_{ad} $\times 10^{-3}$
0.001	0	<i>Вилкоксона</i>	0.26	0.37	1.04	0.22
0.003	0	<i>Вилкоксона</i>	0.70	0.62	1.23	0.51
0.001	0.01	<i>Вилк.+МФ(5)</i>	0.55	0.49	1.19	0.53
0.003	0.01	<i>Вилк.+МФ(5)</i>	1.30	0.80	1.40	0.97
0.001	0.	<i>Ходжеса-Лем.</i>	0.26	0.36	0.90	0.22
0.003	0	<i>Ходжеса-Лем.</i>	0.70	0.64	1.21	0.51
0.001	0.01	<i>ХЛ+МФ(5)</i>	0.57	0.50	1.04	0.49
0.003	0.01	<i>ХЛ+МФ(5)</i>	1.32	0.82	1.37	0.97
0.001	0	<i>α-урезанный</i>	0.26	0.20	0.27	0.19
0.003	0	<i>α-урезанный</i>	0.76	0.50	0.50	0.49
0.001	0.01	<i>α-урез.+МФ(5)</i>	0.54	0.32	0.47	0.40
0.003	0.01	<i>α-урез.+МФ(5)</i>	1.30	0.63	0.65	0.72

χ_{ad} - СКО для локально-адаптивных фильтров, χ_5 , χ_9 , χ_{13} - СКО для неадаптивных фильтров с размерами скользящего окна соответственно 5, 9 и 13 элементов.