

Лекция 5 - Минимизация логических функций (часть 2)

Практическое применение метода Квайна

Исходные данные – Пусть минимизируемая логическая функция задана в виде таблицы истинности

X_1	X_2	X_3	X_4	$F(X_1, X_2, X_3, X_4)$
0	0	0	0	0
0	0	0	1	1
0	0	1	0	0
0	0	1	1	1
0	1	0	0	0
0	1	0	1	1
0	1	1	0	0
0	1	1	1	1

X_1	X_2	X_3	X_4	$F(X_1, X_2, X_3, X_4)$
1	0	0	0	0
1	0	0	1	0
1	0	1	0	0
1	0	1	1	0
1	1	0	0	0
1	1	0	1	0
1	1	1	0	1
1	1	1	1	1

СДНФ:

$$F = \overline{X_1} \overline{X_2} \overline{X_3} X_4 \vee \overline{X_1} \overline{X_2} X_3 X_4 \vee \overline{X_1} X_2 \overline{X_3} X_4 \vee \overline{X_1} X_2 X_3 X_4 \vee X_1 X_2 X_3 \overline{X_4} \vee X_1 X_2 X_3 X_4$$

Этап 1 – Получение сокращенной ДНФ

Для удобства пометим каждую конституенту единицы из СДНФ функции десятичным номером (в произвольном порядке)

$$\begin{aligned}
 F = & \underbrace{\overline{X_1} \overline{X_2} \overline{X_3} X_4}_1 \vee \underbrace{\overline{X_1} \overline{X_2} X_3 X_4}_2 \vee \underbrace{\overline{X_1} X_2 \overline{X_3} X_4}_3 \vee \\
 & \vee \underbrace{\overline{X_1} X_2 X_3 X_4}_4 \vee \underbrace{X_1 X_2 X_3 \overline{X_4}}_5 \vee \underbrace{X_1 X_2 X_3 X_4}_6
 \end{aligned}$$

Проведем анализ возможных вариантов склеивания

$$\begin{aligned}
 1 - 2 \text{ по переменной } X_3: & \overline{X_1} \overline{X_2} X_4 \\
 1 - 3 \text{ по переменной } X_2: & \overline{X_1} \overline{X_3} X_4 \\
 2 - 4 \text{ по переменной } X_2: & \overline{X_1} X_3 X_4 \\
 3 - 4 \text{ по переменной } X_3: & \overline{X_1} X_2 X_4 \\
 4 - 6 \text{ по переменной } X_1: & X_2 X_3 X_4 \\
 5 - 6 \text{ по переменной } X_4: & X_1 X_2 X_3
 \end{aligned}$$

Результатом склеивания всегда является элементарное произведение, содержащее *общую часть* склеиваемых конституент.

Используем полученные результаты склеивания для поглощения элементарных произведений исходного выражения

$$\begin{aligned}
 F = & \overline{X_1 X_2 X_3 X_4} \vee \overline{X_1 X_2 X_3 X_4} \vee \overline{X_1 X_2 X_3 X_4} \vee \\
 & \vee \overline{X_1 X_2 X_3 X_4} \vee \overline{X_1 X_2 X_3 X_4} \vee \overline{X_1 X_2 X_3 X_4}
 \end{aligned}$$

1
2
3

4
5
6

Проанализируем возможности поглощения по каждой склейке

$$\begin{aligned}
 \overline{X_1 X_2 X_4} & \text{ — поглощает 1 и 2} \\
 \overline{X_1 X_3 X_4} & \text{ — поглощает 1 и 3} \\
 \overline{X_1 X_3 X_4} & \text{ — поглощает 2 и 4} \\
 \overline{X_1 X_2 X_4} & \text{ — поглощает 3 и 4} \\
 X_2 X_3 X_4 & \text{ — поглощает 4 и 6} \\
 X_1 X_2 X_3 & \text{ — поглощает 5 и 6}
 \end{aligned}$$

Каждая склейка исключает (заменяет собой) те конститuentы, которые содержат ее в своем составе. Поглощенные конститuentы исключаются (вычеркиваются) из исходного выражения.

Запишем сокращенное выражение и вновь пронумеруем его конститuentы единицы

$$F = \underbrace{\overline{X_1 X_2 X_4}}_1 \vee \underbrace{\overline{X_1 X_3 X_4}}_2 \vee \underbrace{\overline{X_1 X_3 X_4}}_3 \vee \underbrace{\overline{X_1 X_2 X_4}}_4 \vee \underbrace{X_2 X_3 X_4}_5 \vee \underbrace{X_1 X_2 X_3}_6$$

Опять проведем анализ возможных вариантов склеивания

1 – 4 по переменной X_2 : $\overline{X_1 X_4}$
 2 – 3 по переменной X_3 : $\overline{X_1 X_4}$ } Фактически, получаем лишь одну возможную склейку

Проведем поглощение по найденной склейке

$\overline{X_1 X_4}$ – поглощает 1, 2, 3 и 4

В результате получаем

$$F = X_2 X_3 X_4 \vee X_1 X_2 X_3 \vee \overline{X_1 X_4}$$

Дальнейшие склеивания невозможны, мы получили сокращенную ДНФ.

Этап 2 – Получение минимальной ДНФ

5

Строим импликантную матрицу

Простые импликанты	Конstituенты единицы					
	$\overline{X_1} \overline{X_2} \overline{X_3} X_4$	$\overline{X_1} \overline{X_2} X_3 X_4$	$\overline{X_1} X_2 \overline{X_3} X_4$	$\overline{X_1} X_2 X_3 X_4$	$X_1 \overline{X_2} \overline{X_3} \overline{X_4}$	$X_1 X_2 X_3 X_4$
$\overline{X_1} X_4$	X	X	X	X		
$X_2 X_3 X_4$				X		X
$X_1 X_2 X_3$					X	X

Простая импликанта поглощает некоторую конституенту единицы, если является ее собственной частью, этот факт отмечается крестиком в соответствующей клетке импликантной матрицы.

1) Находим базисные простые импликанты (напротив которых стоит единственный во всем столбце крестик), формирующие **ядро** булевой функции: $X_1 X_2 X_3$ и $\overline{X_1} X_4$

2) В рассматриваемом примере ядро функции покрывает все конституенты единицы, поэтому нет необходимости рассматривать комбинации с третьей импликантой, она является лишней.

Минимальная ДНФ имеет вид: $F = X_1 X_2 X_3 \vee \overline{X_1} X_4$

➤ *Метод Квайна – Мак-Класки* – формализованный на этапе нахождения простых импликант метод Квайна.

Формализация состоит в следующем.

- 1) Все конститuentы единицы из СДНФ записывают их двоичными номерами
- 2) Все номера разбиваются на непересекающиеся группы. Признак образования i -й группы – i единиц в каждом двоичном номере конститuentы единицы
- 3) Склеивание производят только между номерами соседних групп. Склеиваемые номера отмечаются каким-либо знаком (например, зачеркиванием).
- 4) Склеивания производят всевозможные, как и в методе Квайна. Неотмеченные после склеивания номера являются простыми импликантами.

Далее нахождение минимальных ДНФ производится, как и в методе Квайна, с использованием импликантной матрицы.

Практическое применение метода Квайна – Мак-Класки

Исходные данные – Пусть минимизируемая логическая функция задана в виде СДНФ

$$F = \overline{X_1} \overline{X_2} \overline{X_3} X_4 \vee \overline{X_1} \overline{X_2} X_3 X_4 \vee \overline{X_1} X_2 \overline{X_3} X_4 \vee \overline{X_1} X_2 X_3 X_4 \vee X_1 X_2 X_3 \overline{X_4} \vee X_1 X_2 X_3 X_4$$

Запишем все конstituенты единицы их двоичными номерами

$$F = 0001 \vee 0011 \vee 0101 \vee 0111 \vee 1110 \vee 1111$$

Образуем группы двоичных номеров

Номер группы	Двоичные номера конstituент единицы		
	Этап склейки		
	1	2	3
0	–	–	–
1	0001	00*1, 0*01	0**1
2	0011, 0101	0*11, 01*1	–
3	0111, 1110	*111, 111*	–
4	1111	–	–

Склеиваются номера только из соседних групп с отличием в одной позиции, позиция склейки отмечается *, склеенные номера вычеркиваются. Оставшиеся номера соответствуют простым импликантам.

Получаем три простые импликанты: $*111$, $111*$ и $0**1$

Строим импликантную матрицу

Двоичные номера простых импликант	Двоичные номера конституент единицы					
	0001	0011	0101	0111	1110	1111
$0**1$	X	X	X	X		
$*111$				X		X
$111*$					X	X

По таблице согласно методу Квайна определяем совокупность простых импликант, соответствующую минимальной ДНФ

$$F = 111* \vee 0**1$$

Для восстановления буквенного вида достаточно выписать произведения тех переменных, которые соответствуют сохранившимся двоичным цифрам, т.е.

$$F = X_1 X_2 X_3 \vee \overline{X_1} X_4$$

Основное достоинство метода – сокращение числа попарных сравнений при склейке за счет разбиения конституент на группы.