Лекция 6 - Минимизация логических функций (часть 3)

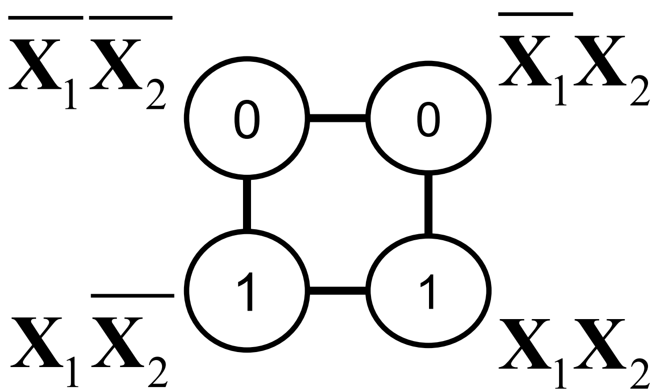
➢ ***Метод диаграмм Карно*** – графический способ минимизации булевых функций, обеспечивающий простое и быстрое нахождение решения для небольшого числа переменных (до 6-ти).

Карты Карно предоставляют наглядный способ отыскания термов СДНФ, пригодных к склейке с последующим поглощением.

Карту Карно формируют переменные из таблицы истинности в порядке, определяемом кодом Грея, в котором каждое следующее число отличается от предыдущего только одним разрядом.

Функция **n** переменных в виде СДНФ (СКНФ) может иметь в своем составе $\mathbf{2^n}$ различных термов, составляющих структуру, топологически эквивалентную **n**-мерному кубу, а любые два терма, соединенные ребром, пригодны для склейки и поглощения.

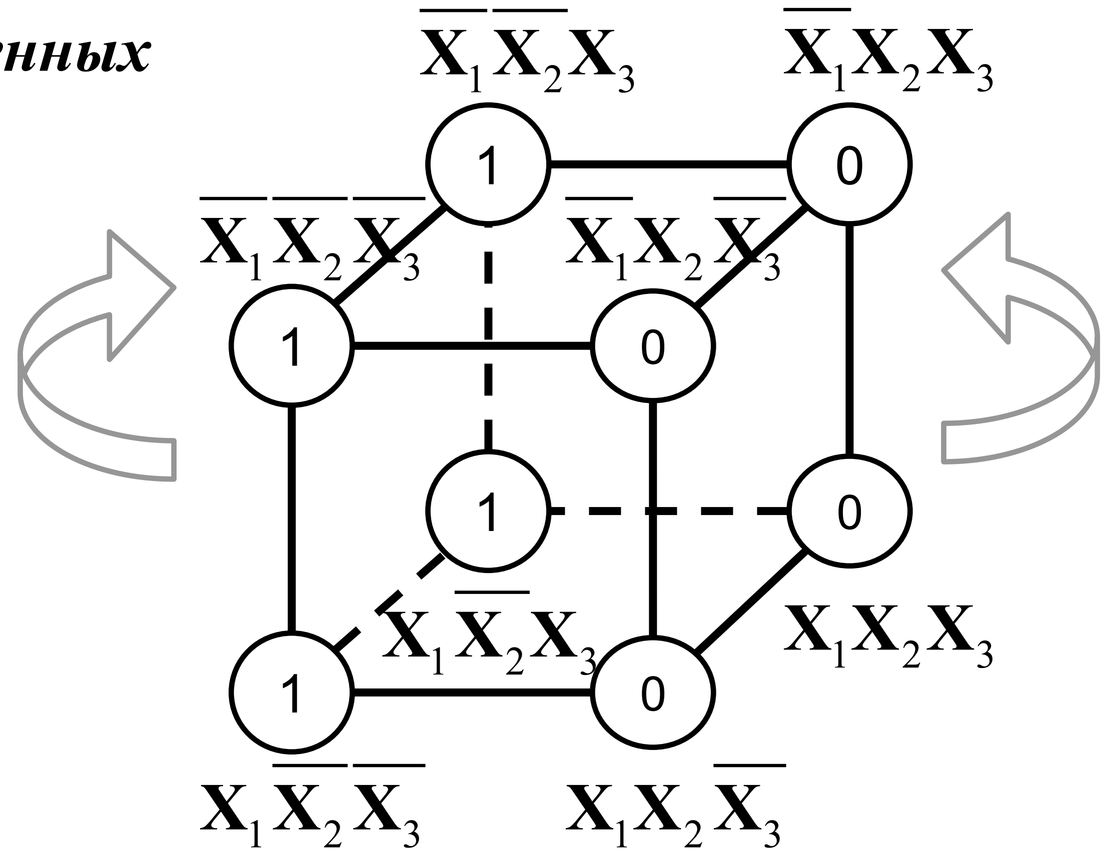
X_1	X_2	$F(X_1, X_2)$
0	0	0
0	1	0
1	0	1
1	1	1



		X_2	
		0	1
X_1	0	0	0
	1	1	1

Функция трех переменных

X_1	X_2	X_3	$F(X_1, X_2, X_3)$
0	0	0	1
0	0	1	1
0	1	0	0
0	1	1	0
1	0	0	1
1	0	1	1
1	1	0	0
1	1	1	0



Карта Карно представляет собой ***плоскую развертку*** булева куба, при этом клетки, находящиеся в крайних столбцах и строках таблицы, соседствуют между собой.

X_2X_3		00	01	11	10
X_1	0	1	1	0	0
	1	1	1	0	0

Функция четырех переменных

$$F(X_1, X_2, X_3, X_4) = $$
$$= C_F^1(0,1,2,3,5,7,10,12,14,15)$$

X_1X_2 \ X_3X_4	00	01	11	10
00	1_{0}	1_{1}	1_{3}	1_{2}
01	0_{4}	1_{5}	1_{7}	0_{6}
11	1_{12}	0_{13}	1_{15}	1_{14}
10	0_{8}	0_{9}	0_{11}	1_{10}

Функция пяти переменных

$$F(X_1, X_2, X_3, X_4, X_5) = C_F^1(3,7,15,16,17,19,21,27,30,31)$$

X_1X_2 \ X_3X_4	00	01	11	10
00	0_{0}	0_{1}	1_{3}	0_{2}
01	0_{4}	0_{5}	1_{7}	0_{6}
11	0_{12}	0_{13}	1_{15}	0_{14}
10	0_{8}	0_{9}	0_{11}	0_{10}
$X_5 = 0$				

X_1X_2 \ X_3X_4	00	01	11	10
00	1_{16}	1_{17}	1_{19}	0_{18}
01	0_{20}	1_{21}	0_{23}	0_{22}
11	0_{28}	0_{29}	1_{31}	1_{30}
10	0_{24}	0_{25}	1_{27}	0_{26}
$X_5 = 1$				

Для карт Карно 5-ти и более переменных нужно учитывать, что квадраты 4x4 виртуально находятся друг над другом в третьем измерении, поэтому соответствующие клетки двух таблиц являются соседними и их термы можно склеивать.

Основные свойства карт Карно

- Каждой клетке карты соответствует один аргумент-вектор логической функции (одна строка таблицы истинности)

$$\mathbf{F}(1,1,0,0) = 1$$

	X_3X_4	00	01	11	10
X_1X_2	00	1	1	1	1
	01	0	1	1	0
	11	1	0	1	1
	10	0	0	0	1

- В клетке пишут значение логической функции, которое она принимает на соответствующем аргумент-векторе.
- Общее число клеток карты Карно для логической функции **n** переменных составляет $\mathbf{2^n}$.
- Число соседних клеток (имеющих общую сторону) у каждой клетки карты равно числу переменных **n**.
- Аргумент-векторы любых двух соседних клеток карты являются ***ближайшими*** друг к другу (отличаются только в одной координате), что соответствует их соединению одним ребром булева куба.

Основные понятия

X_1X_2 \ X_3X_4	00	01	11	10
00	1	1	1	1
01	0	1	1	0
11	1	0	1	1
10	0	0	0	1

- ***Интервал ранга*** **n–r** – это множество $\mathbf{2^r}$ таких двоичных векторов, среди которых для каждого вектора найдется точно **r** ближайших к нему векторов:
  - интервал ранга n-0: {0000} = **{0000}**
  - интервал ранга n-1: {1100, 1000} = **{1*00}**
  - интервал ранга n-2: {0010, 0110, 1110, 1010} = **{**10}**
- Представление интервала через постоянные (неизменяющиеся) координаты, при котором изменяющиеся координаты заменяются «*» называется ***компактным***.
- ***Интервал единиц (нулей) логической функции*** – интервал, для двоичных векторов которого функция принимает значение ***1*** (***0***): {0001, 0011, 0101, 0111} = {0**1} → F({0**1}) = 1 (0)
- ***Максимальный интервал единиц (нулей)*** – такой интервал 1 (0), который не входит ни в один другой интервал единиц.

Контуры карты Карно

X_1X_2 \ X_3X_4	00	01	11	10
00	1	1	1	1
01	0	1	1	0
11	1	0	1	1
10	0	0	0	1

- Группы клеток карты Карно с размерами, кратными $\mathbf{2^m}$, $\mathbf{m} = 0, 1, 2\ldots\infty$ в каждом из измерений, называются ***контурами***:
  - контур 1x1 – интервал {1010}
  - контур 1x2 – интервал {1100, 1110} = {11*0}
  - контур 1x4 – интервал {0000, 0001, 0011, 0010} = {00**}
  - контур 2x2 – интервал {0001, 0011, 0101, 0111} = {0**1}
- Каждый контур карты Карно соответствует определенному интервалу, для которого можно делать склейку по переменным *.
- Контуры карты Карно могут пересекаться.
- Для минимизации используются контуры, содержащие ***единицы*** (для получения ДНФ) или ***нули*** (для получения КНФ). Контуры ***не должны*** содержать ***неодинаковых*** значений.
- Каждый контур дает ***одну элементарную конъюнкцию*** (для ДНФ) или ***дизъюнкцию*** (для КНФ).

Алгоритм минимизации методом карты Карно

X_1X_2 \ X_3X_4	00	01	11	10
00	1	1	1	1
01	0	1	1	0
11	1	0	1	1
10	0	0	0	1

- Представить логическую функцию картой Карно.
- Покрыть на карте ***все 1*** (для получения ДНФ) или ***0*** (для получения КНФ) возможно ***меньшим числом*** возможно ***более крупных размеров*** контуров:
  - начать с выделения контуров наибольшего возможно размера
  - затем выделять все допустимые контуры с меньшим размером, не покрытые целиком каким-либо уже выделенным интервалом большего размера
- Найти для каждого контура соответствующий ему интервал:
  - {0**1} – $\overline{X}_1X_4$
  - {*010} – $\overline{X}_2X_3\overline{X}_4$
  - {*111} – $X_2X_3X_4$
  - {00**} – $\overline{X}_1\overline{X}_2$
  - {1*10} – $X_1X_3\overline{X}_4$
  - {11*0} – $X_1X_2\overline{X}_4$
  - {111*} – $X_1X_2X_3$
- По постоянным переменным интервалов записать элементарные конъюнкции (дизъюнкции).

Алгоритм минимизации методом карты Карно

- Выделить ***ядровые интервалы*** – такие, удаление которых дает конституенту, не покрытую никаким другим контуром:

  {0**1}, {00**}, {11*0}

X_1X_2 \ X_3X_4	00	01	11	10
00	1	1	1	1
01	0	1	1	0
11	1	0	1	1
10	0	0	0	1

- С помощью комбинаций неядровых интервалов найти все возможные полные покрытия конституент функции.

- Для всех вариантов покрытия записать соответствующие ***тупиковые ДНФ*** (***КНФ***) и выбрать среди них ***минимальную***:

1) $\mathbf{F} = \overline{X}_1 X_4 \vee \overline{X}_1 \overline{X}_2 \vee X_1 X_2 \overline{X}_4 \vee \overline{X}_2 X_3 \overline{X}_4 \vee X_2 X_3 X_4$

2) $\mathbf{F} = \overline{X}_1 X_4 \vee \overline{X}_1 \overline{X}_2 \vee X_1 X_2 \overline{X}_4 \vee X_1 X_3 \overline{X}_4 \vee X_2 X_3 X_4$

3) $\mathbf{F} = \overline{X}_1 X_4 \vee \overline{X}_1 \overline{X}_2 \vee X_1 X_2 \overline{X}_4 \vee X_1 X_3 \overline{X}_4 \vee X_1 X_2 X_3$

4) $\mathbf{F} = \overline{X}_1 X_4 \vee \overline{X}_1 \overline{X}_2 \vee X_1 X_2 \overline{X}_4 \vee \overline{X}_2 X_3 \overline{X}_4 \vee X_1 X_2 X_3$

Особенности применения методов минимизации

- ***Недостатки*** метода карт Карно:
  - целесообразно применять при числе переменных не более 5-ти
  - выбор контуров осуществляется ***интуитивно*** и не существует алгоритма, обеспечивающего наилучшее решение
- На практике наибольшее применение нашли методы ***карт Карно*** и ***Квайна – Мак-Класки***. Выбор метода определяется числом переменных функции: ***до шести*** – применяется метод карт Карно, ***шесть и более*** – метод Квайна – Мак-Класки.
- ***Минимизация КНФ*** производится аналогично рассмотренным методам минимизации ДНФ булевых функций.
- Рассмотренные методы минимизации позволяют получить формулу функции в виде ***минимальной ДНФ*** (***КНФ***), однако эта формула может не являться ***абсолютно минимальной***, т.е. может быть дополнительно ***упрощена***, но после упрощения она уже не будет относиться к классу ***нормальных форм***. Получение такого решения является в еще большей степени искусством, чем рассмотренные выше методы.

Минимизация частично определенных функций

В реальных задачах часто бывает так, что значение булевой функции на некоторых наборах (например, запрещенных комбинациях) ***не определено*** и может задаваться произвольно.

В этом случае доопределение функции целесообразно проводить так, чтобы ее ***минимальная нормальная форма*** имела ***наименьшее число литералов*** из всех возможных вариантов.

Для метода карт Карно это соответствует такому доопределению, которое обеспечит выбор контуров максимального размера.

Минимизация ДНФ

X_1X_2 \ X_3X_4	00	01	11	10
00	0	0	**1**	1
01	0	0	**0**	0
11	0	0	**0**	0
10	1	1	**1**	1

$$F = X_1\overline{X_2} \vee \overline{X_2}X_3$$

Минимизация КНФ

X_1X_2 \ X_3X_4	00	01	11	10
00	0	0	**1**	1
01	0	0	**0**	0
11	0	0	**0**	0
10	1	1	**1**	1

$$F = \overline{X_2} \wedge X_1 + X_2 + X_3$$

Преобразование базиса логической функции

- ***Функционально полные системы булевых функций*** – совокупность таких булевых функций, из которых при помощи операций суперпозиции и замены переменных может быть построена любая произвольная булева функция.
- Наиболее практически полезными функционально полными системами являются:
  - **{И, ИЛИ, НЕ}** – стандартный базис (нормальные формы)
  - **{НЕ}** – простейший базис, основа реализации схемотехники всех базовых логических элементов
  - **{ИЛИ-НЕ}** – базис на основе операции «стрелка Пирса»
  - **{И-НЕ}** – базис на основе операции «штрих Шеффера»
- В силу особенностей аппаратной реализации логических элементов ***наиболее удобными*** базисами оказываются: базисы **{ИЛИ-НЕ}** и **{И-НЕ}**.
- Рассмотрим принципы перехода от ДНФ (КНФ) к этим базисам.

Переход от КНФ к базису ИЛИ-НЕ («Стрелка Пирса»)

Стрелка Пирса (ИЛИ-НЕ) – логическая функция двух аргументов, которая возвращает истинное значение тогда и только тогда, когда оба исходных высказывания ложны.

x	y	x ↓ y
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	0

$$f(x,y) = x \downarrow y = y \downarrow x = \\ = \mathrm{NOR}(x,y) = \text{ИЛИ-НЕ}(x,y)$$

Для перехода от КНФ к базису ИЛИ-НЕ необходимо:

- заменить все операции ∨ и ∧ операциями ↓
- сохранить все скобки и отрицания на своих местах
- перейти к двухместным операциям по правилам:

$$x_1 \downarrow x_2 \downarrow x_3 = x_1 \downarrow \overline{\overline{x_2 \downarrow x_3}} = \overline{\overline{x_1 \downarrow x_2}} \downarrow x_3 \neq (x_1 \downarrow x_2) \downarrow x_3$$

$$x_1 \downarrow x_2 \downarrow x_3 \downarrow x_4 = \overline{\overline{x_1 \downarrow x_2}} \downarrow \overline{\overline{x_3 \downarrow x_4}} \qquad \overline{x} = x \downarrow x$$

$$F = \left(\overline{X_1} + \overline{X_4}\right) \cdot \left(\overline{X_3} + \overline{X_4}\right) \cdot \left(X_1 + X_2 + X_3 + X_4\right) =$$

$$= \left(\overline{X_1} \downarrow \overline{X_4}\right) \downarrow \left(\overline{X_3} \downarrow \overline{X_4}\right) \downarrow \left(X_1 \downarrow X_2 \downarrow X_3 \downarrow X_4\right) =$$

$$= \overline{\left(\overline{X_1} \downarrow \overline{X_4}\right) \downarrow \left(\overline{X_3} \downarrow \overline{X_4}\right)} \downarrow \left(\overline{\overline{X_1 \downarrow X_2}} \downarrow \overline{\overline{X_3 \downarrow X_4}}\right)$$

Переход от ДНФ к базису И-НЕ («Штрих Шеффера»)

Штрих Шеффера (И-НЕ) – логическая функция двух аргументов, которая возвращает ложное значение тогда и только тогда, когда оба исходных высказывания истинны.

x	y	x ↓ y
0	0	1
0	1	1
1	0	1
1	1	0

$$\mathbf{f}(\mathbf{x},\mathbf{y}) = \mathbf{x}|\mathbf{y} = \mathbf{y}|\mathbf{x} =$$
$$= \mathbf{NAND}(\mathbf{x},\mathbf{y}) = \textbf{И-НЕ}(\mathbf{x},\mathbf{y})$$

Для перехода от ДНФ к базису И-НЕ необходимо:

- заменить все операции ∨ и ∧ операциями |
- сохранить все скобки и отрицания на своих местах
- перейти к двухместным операциям по правилам:

$$X_1 | X_2 | X_3 = X_1 | \overline{X_2 | X_3} = \overline{X_1 | X_2} | X_3 \neq (X_1 | X_2) | X_3$$
$$X_1 | X_2 | X_3 | X_4 = \overline{X_1 | X_2} | \overline{X_3 | X_4} \qquad \overline{X} = X | X$$

$$F = X_2 \cdot \overline{X_4} \vee X_3 \cdot \overline{X_4} \vee X_1 \cdot \overline{X_4} \vee \overline{X_1} \cdot \overline{X_2} \cdot X_4 =$$
$$= \left(X_2 | \overline{X_4}\right) | \left(X_3 | \overline{X_4}\right) | \left(X_1 | \overline{X_4}\right) | \left(\overline{X_1} | \overline{X_2} | X_4\right) =$$
$$= \overline{\left(X_2 | \overline{X_4}\right) | \left(X_3 | \overline{X_4}\right)} | \overline{\left(X_1 | \overline{X_4}\right) | \left(\overline{X_1} | \overline{\overline{X_2} | X_4}\right)}$$